ANALECTA CRACOVIENSIA XV 1983

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Digitalizacja archiwalnych numerów czasopisma naukowego Analecta Cracoviensia 1–24 (1969–1992) i ich publikacja w otwartym dostępie – zadanie finansowane w ramach umowy 672/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę

Ks. MICHAŁ HELLER

O PRZESTRZENIACH BANACHA

1. ŚWIAT FUNKCJI

Każde dwa byty, należące do Wszechświata, pozostają do siebie w pewnej relacji. Jeżeli nawet jakieś dwa ciała są od siebie zupełnie izolowane, zachodzi pomiędzy nimi relacja braku wzajemnego oddziaływania. Whitehead twierdził, że we Wszechświecie nie ma niczego poza strukturą zbudowaną z relacji. Nie wypowiadam obecnie aż tak mocnego twierdzenia; utrzymuję tylko, że Wszechświat jest unerwiony relacjami.

Ostatnie stwierdzenie, mimo wszystko, brzmi ontologicznie, ale w istocie jest ono prawie tautologią. A to dlatego, że pojęcie relacji jest bardzo ogólne, by nie rzec — bardzo ogólnikowe. Jak wiadomo, relację definiuje się jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego. Można tworzyć iloczyny kartezjańskie dowolnie określonych zbiorów i wybierać z nich dowolne podzbiory. W ten sposób zupełnie naturalnie można określać sztuczne relacje, jak na przykład relację pomiędzy dwoma ciałami, które nie mają ze sobą nic wspólnego. To jednak — jak zobaczymy poniżej w przypadku funkcji — nie jest wadą „opisu relacyjnego". Zasadnicza trudność polega na tym, że na skutek swojej ogólności „opis relacyjny" odznacza się dużą bezwładnością: rachunek „na relacjach" sprowadza się do rachunku na zbiorach (na podzbiorach iloczynów kartezjańskich), co daje dość ubogie możliwości manipulowania formułami.

Okazuje się, że stosunkowo niewielkie zawężenie pojęcia relacji znacznie poprawia tę nieprzyjemną sytuację. W przypadku dwuczłonowej relacji $R \subset X \times Y$ wystarczy tylko zażądać, by każdy element x zbioru X pozostawał w relacji R z pewnym elementem y zbioru Y, oraz by dla każdego elementu x zbioru X istniał co najwyżej jeden element y zbioru Y, z którym x wchodziłby w relację R. Pojęcie relacji przechodzi wówczas w pojęcie funkcji. Potocznie powiadamy, że funkcje wyrażają pewne zależności. Oczywiście, można tworzyć „sztuczne zależności". Można w zasadzie wyrazić funkcyjnie na przykład „zależność" stopnia zasolenia mórz od stopnia popytu na nowe marki samochodów w Stanach Zjednoczonych, ale na tym właśnie polega siła opisu funkcyjnego. Opis ten a priori nie przesądza o zależności przyczynowej. Związki przyczynowe są bardzo trudne (lub jak chcą niektórzy: niemożliwe) do uchwycenia ich w doświadczeniu; ograniczenie się do opisu: gdy wielkość X zmienia się tak, to wielkość Y zmienia się tak, bez wnikania w pytanie dlaczego, gwarantuje obiektywizm, nienarzucanie naszej interpretacji.

Z chwilą, gdy w fizyce zastosowano opis funkcyjny (zwykle uważa się Galileusza za tego, kto pierwszy zrozumiał doniosłość tego opisu), przyroda natychmiast odpowiedziała ujawnieniem zawartych w niej informacji. Jedną z niecałkiem dotychczas zrozumiałych tajemnic przyrody, jest pytanie, dlaczego reaguje ona na niektóre opisy funkcyjne, np. takie jak zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości od powierzchni Ziemi, a nie reaguje na inne, np. takie jak wspomniana zależność stopnia zasolenia mórz od stopnia popytu na nowe marki samochodów w Stanach Zjednoczonych. Wydaje się, że przyroda w ten sposób jak gdyby wskazuje na te opisy funkcyjne, którym odpowiadają związki przyczynowe, ale zagadnienie jest na tyle subtelne, że nie da się go rozstrzygnąć standardowymi metodami fizyki, tzn. doświadczeniem i opisem funkcyjnym.

Tak czy inaczej świat współczesnej fizyki to świat funkcji: funkcji pomiędzy różnymi mierzalnymi wielkościami, funkcji określonych na funkcjach itp. Rodząca się fizyka u progu czasów nowożytnych stworzyła pojęcie funkcji, z początku niedokładne jeszcze i intuicyjne; ona też wymuszała na matematyce uściślanie pojęć związanych z funkcjami. Obecnie matematyka, jakby odwdzięczając się fizyce za inspiracje i pierwsze impulsy, oddaje na jej usługi coraz bardziej abstrakcyjne i coraz bardziej skuteczne metody analizy funkcjonalnej.

2. SZCZĘŚCIE W PRZESTRZENIACH BANACHA

Ogólne pojęcie funkcji nie pojawiło się w matematyce wcześniej niż na początku XIX wieku. Na konieczność badania przestrzeni funkcyjnych pierwszy zwrócił uwagę Riemann w swoim słynnym wykładzie inauguracyjnym *O założeniach służących za podstawę geometrii.* Wkład późniejszych czasów do rozwoju teorii funkcji polegał głównie na przejściu do rozpatrywania funkcji, których dziedzina i zbiór wartości nie ograniczają się do osi liczb rzeczywistych lub do przestrzeni o skończonych wymiarach. Dzięki temu przejściu dokonało się umieszczenie przestrzeni funkcyjnych w ich naturalnym środowisku, tzn. w ogólnej teorii przestrzeni topologicznych [1].

Studiowanie matematyki wytwarza pewne, dość niebezpieczne złudzenie. W praktyce matematycznej mamy zwykle do czynienia z funkcjami porządnymi, np. z funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi wymaganą lub nawet dowolną ilość razy, z przestrzeniami funkcyjnymi o odpowiednio „gładkiej strukturze" itp. Stwarza to wrażenie, że w zasadzie istnieją funkcje porządne i tylko niekiedy trafia się na przypadki „zwyrodniałe", jak funkcje nieciągłe, nieróżniczkowalne itp. [2] Oczywiście tak nie jest. Wystarczy chwila głębszego namysłu (o którą nie tak łatwo w „nawale liczenia"), by zacząć podejrzewać, że jest wręcz przeciwnie. To właśnie funkcje porządne stanowią podzbiory „miary zero" w zbiorze wszystkich możliwych funkcji. Niezłośliwość Pana Boga, o której tak często wspominał Albert Einstein, przejawia się przede wszystkim w tym, że w swoich architektonicznych planach wszechświata Stwórca posługiwał się „szczególnie porządnymi" funkcjami, a w każdym razie takimi funkcjami, które dają się dobrze przybliżać funkcjami szczególnie porządnymi. Do tych szczególnie porządnych funkcji należą funkcje będące elementami przestrzeni Banacha.

W pięknym podręczniku, napisanym przez trzy panie: Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette i Margaret Dillard-Bleick [3], rozdział poświęcony przestrzeniom Banacha jest zaopatrzony w motto: „Happiness is a Banach space". To, że matematycy znajdują szczęście w przestrzeniach Banacha, mogłoby być rzeczą dość zrozumiałą, ale dlaczego przestrzenie te pojawiają się tak często ilekroć chcemy rozszyfrować strukturę rzeczywistego świata? Czy świat jest zbudowany według recept na szczęście dla matematyków? Wątpię, czy ktokolwiek jest w stanie odpowiedzieć na to pytanie. Dalsze części niniejszego artykułu będą poświęcone sformułowaniu zdziwienia nad tym pytaniem. Póki nie istnieje odpowiedź, najlepszym sposobem rozumienia pytania jest uważne przyglądanie się zdziwieniu, jakie ono wzbudza.

3. NATURA PRZESTRZENI BANACHA

Przestrzeń liniowa unormowana i zupełna nazywa się przestrzenią Banacha. Przestrzeń ta jest uściśleniem i naturalnym uogólnieniem poję-

[1] Zwięzłą historię rozważanych tu pojęć można znaleźć w: N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, Warszawa 1980, zwłaszcza rozdziały: *Przestrzenie funkcyjne* (s. 257—258), oraz *Przestrzenie wektorowe topologiczne* (s. 259—273).

[2] Np. zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych (zbiór funkcji typu $f : R \to R$) jest mocy c^c, podczas gdy podzbiór ciągłych funkcji rzeczywistych jest mocy c (c oznacza liczbę kardynalną zbioru o mocy continuum).

[3] *Analysis, Manifolds and Physics*, Amsterdam—New York—Oxford 1978.

cia pola wektorowego, określonego na przestrzeni Euklidesa, jakim — na ogół beztrosko — posługuje się w szkolnym wykładzie elementarnej geometrii i fizyki. Każdemu elementowi x przestrzeni Banacha X (każdemu „wektorowi") jest przyporządkowana pewna rzeczywista liczba $\|x\|$, zwana normą, odpowiadająca pojęciu długości wektora. Norma jest określona przy pomocy aksjomatów, które formalizują własności analogiczne do własności długości:

1° $\|x\| > 0$, dla każdego $x \in X$
2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, dla każdego $\alpha \in \mathbf{R}^1$ i dla każdego $x \in X$
3° $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ dla każdego $x_1, x_2 \in X$
(nierówność trójkąta)
4° $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$

Liniowość przestrzeni Banacha gwarantuje, że wykonywalne są w niej operacje dodawania jej elementów (składania wektorów) i mnożenia ich przez liczby (rzeczywiste lub zespolone).

Zupełność przestrzeni Banacha oznacza, że każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni ma w niej granicę. Można by obrazowo powiedzieć, że każdy ciąg zbiegający się w przestrzeni Banacha osiąga granicę w tej przestrzeni.

Własności wyrażone w definicji przestrzeni Banacha zapewniają, że — z jednej strony — przestrzeń ta jest obiektem bardzo ogólnym, tzn. obejmującym bogatą klasę szczególnych przypadków, jakie często pojawiają się w praktyce matematycznej, oraz — z drugiej strony — że jest ona obiektem „zachowującym się poprawnie", tzn. eliminującym sytuacje patologiczne, które wymagałyby specjalnej ostrożności ze strony matematyka.

W szczególności, niemal natychmiast, z samej definicji przestrzeni Banacha, wynika, że można na niej wprowadzić metrykę. Istotnie, jeżeli norma elementu przestrzeni Banacha odpowiada pojęciu długości wektora, to można jej w prosty sposób użyć do mierzenia „odległości". A mianowicie, metryka czyli „odległość" między elementami przestrzeni Banacha x_1 i x_2 równa się z definicji: $\|x_1 - x_2\|$. Dzięki temu przestrzenie Banacha posiadają te wszystkie eleganckie własności, które mają przestrzenie metryczne.

Jedną z głównych zalet przestrzeni Banacha jest to, że są one „naturalnym środowiskiem" rachunku różniczkowego. Uogólnienie różniczkowania na n-wymiarowej przestrzeni arytmetycznej $\mathbf{R}^n$ (która jest szczególnym przypadkiem przestrzeni Banacha) do różniczkowania na przestrzeniach Banacha (w ogólnym przypadku) jest tak bezpośrednie, że wiele twierdzeń sprawia tu wrażenie, jakby były mechanicznie powtórzone z elementarnego wykładu analizy matematycznej. Jest to oczywiście pozór. Pojęcie pochodnej funkcji zostaje tu uogólnione do pojęcia pochodnej dowolnego odwzorowania z jednej przestrzeni Banacha do drugiej. W ten sposób nowoczesna analiza funkcjonalna zyskuje jedno ze swoich najbardziej fundamentalnych narzędzi [4].

Warto wreszcie dodać, że pojęcie przestrzeni unormowanej wprowadził do matematyki Stefan Banach w swojej rozprawie doktorskiej w 1922 r., a od rozprawy Banacha o „operacjach liniowych" [5] rozpoczyna się „wiek dojrzały dla przestrzeni unormowanej" [6].

4. ROZWÓJ NAUKI I ZASADA BANACHA

Już sam fakt, że przestrzenie Banacha są tak istotnie związane z operacją różniczkowania, wyznacza im wyjątkową pozycję jako narzędziu do opisu rzeczywistego świata. Pragnę jednak zwrócić uwagę na inne, mniej oczywiście widoczne relacje pomiędzy przestrzeniami Banacha a strukturą świata.

Podstawą empirycznej metody badania świata jest pomiar. Wynik doświadczenia wtedy jest w pełni wartościowy, gdy daje liczbę, którą można „wstawić" w „wolne miejsca" formalizmu opisującego daną dziedzinę rzeczywistego świata. W formalizmie teorii często występują parametry, których wartości sama teoria nie określa i to nazywam „wolnymi miejscami" formalizmu. Jednakże istotną sprawą jest to, że pomiar nigdy nie daje jednej liczby, lecz — na skutek nieuniknionych błędów pomiarowych — pewien przedział, taki, że wszystkie liczby z tego przedziału mogą stanowić wyniki niesprzeczne z rezultatem pomiaru.

Jeżeli więc teorię z różnymi wartościami parametrów wypełniających „wolne miejsca" uważać za różne teorie, to w wyniku coraz dokładniejszych serii pomiarów otrzymujemy ciąg teorii coraz dokładniej — jak mówimy — opisujących świat.

Ale każda teoria jest budowana w oparciu o pewne założenia upraszczające: pomijamy tarcie, opór powietrza, ograniczamy się do małych prędkości, do słabych pól grawitacyjnych... Stawienie czoła przyrodzie w całym jej skomplikowaniu byłoby zadaniem przerastającym nasze możliwości. W związku z tym mówimy o zabiegu idealizowania przyrody. I...— rzecz zaskakująca — przyroda ulega badaniom prowadzonym przy zało-

---

[4] Rachunek różniczkowy można uprawiać na przestrzeniach ogólniejszych niż przestrzenie Banacha, np. na dowolnych topologicznych przestrzeniach liniowych, jednakże uogólnienie nie jest wówczas tak bezpośrednie, np. twierdzenie o funkcji uwikłanej nie jest wtedy słuszne bez dodatkowych założeń.

[5] S. Banach, *Theorie des operations lineaires*, Warszawa 1932.

[6] N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, s. 272.

żeniach często skrajnej idealizacji. Niemniej jednak, w miarę postępu nauki, staramy się coraz bardziej ograniczać założenia upraszczające, usiłujemy budować teorie (lub modele) — jak powiadamy — coraz bardziej realistyczne. I tak w wyniku rozwoju nauki znowu otrzymujemy ciąg teorii coraz wierniej — jak sądzimy — opisujących świat.

Powstają ważkie pytania: Czy proces naszego poznawania świata jest zbieżny, tzn. czy ciąg coraz dokładniejszych pomiarów zbliża się do „prawdziwej" wartości mierzonego parametru? Czy w ciągu coraz bardziej realistycznych teorii zbliżamy się do „prawdy" o świecie? Co to znaczy „prawdziwa wartość parametru" i co to znaczy „prawda o świecie"? Jak wiadomo z historii, postawienie pytania o prawdę nawet najwyższym autorytetom nie gwarantuje otrzymania odpowiedzi. Niemniej jednak postarajmy się przynajmniej uporządkować te pytania.

A więc każdą naszą teorię wyobraźmy sobie jako wiernie opisującą jakiś możliwy świat. Ponieważ teorii teoretycznie możemy konstruować nieskończenie wiele (choćby przez wybieranie dowolnych wartości dla „wolnych parametrów"), zbiór wszystkich możliwych światów możemy traktować jako pewną nieskończoną przestrzeń: każdy punkt tej przestrzeni przedstawia pewien możliwy świat. A teraz odważnie załóżmy, że nasza przestrzeń wszystkich możliwych światów jest przestrzenią Banacha. Jeżeli to założenie jest słuszne, to nie tylko naszym pytaniom możemy nadać ścisły sens, ale możemy także dać na nie jednoznaczną odpowiedź. Niestety „jeżeli" występujące na początku poprzedniego zdania należy mocno podkreślić. Jak zobaczymy, nasze założenie jest znowu grubą idealizacją tego, co rzeczywiście dzieje się w nauce.

Rozważmy przestrzeń Banacha X z metryką $d(x, y)$, $x, y \in X$, określoną za pomocą normy: $d(x, y) = \|x - y\|$. Niech f będzie odwzorowaniem przestrzeni X w siebie $f: X \to X$, takim że $d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q \cdot d(x_1, x_2)$, gdzie $0 \leqslant q < 1$.

Odwzorowanie takie nazywamy odwzorowaniem zwężającym (lub zbliżającym). Nazwa ta jest usprawiedliwiona faktem, że odległość pomiędzy dwoma punktami przestrzeni X po odwzorowaniu f jest niewiększa niż przed odwzorowaniem.

Tzw. zasada Banacha głosi, że jeżeli w przestrzeni Banacha mamy ciąg powstały przez kolejne wykonywanie odwzorowań zwężających, tzn.

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))\ldots$$

to (1) ciąg taki jest zbieżny do granicy, nazwijmy ją y, należącej do X; (2) granica ta jest punktem stałym odwzorowania f, tzn. $f(y) = y$, czyli zastosowanie odwzorowania f do punktu y nie „porusza" go; (3) punkt y jest jedynym punktem stałym odwzorowania f; (4) zachodzi wzór

$$d(y, x_m) \leqslant \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \qquad (*)$$

Sens zasady Banacha w odniesieniu do postawionych przeze mnie pytań jest oczywisty. Jeżeli zbiór wszystkich możliwych światów (opisywanych przez wszystkie możliwe konstruowane przez nas teorie) jest przestrzenią Banacha, to narzuca się samo przez się, by odwzorowania zwężające tej przestrzeni w siebie interpretować jako proces rozwoju nauki — przechodzenie do kolejnych teorii coraz dokładniej opisujących rzeczywisty świat. Zasada Banacha gwarantuje, że w przestrzeni możliwych światów istnieje punkt stały odwzorowania f, granica ciągu naszych kolejnych teorii, i że granica ta jest tylko jedna. Wzór (*) pozwala, znając *m* kolejnych kroków na drodze konstruowania ciągu „zwężających" teorii, ocenić górną granicę odległości od punktu stałego, który oczywiście reprezentuje teorię wiernie opisującą rzeczywisty świat.

Należy jednak mocno podkreślić, że odwzorowanie zwężające w przestrzeni Banacha interpretowane jako model rozwoju nauki jest modelem tylko grubo przybliżonym do rzeczywistej ewolucji nauk empirycznych. Grubość tego modelu polega przede wszystkim na tym, że — ściśle rzecz biorąc — nie możemy mówić o zbieżności ciągu kolejnych teorii coraz dokładniej opisujących rzeczywisty świat. Z rzeczywistej historii nauki znamy zwykle tylko kilka wyrazów tego ciągu i rozważanie w takiej sytuacji pytania, czy jest to ciąg zbieżny, czy nie, jest co najmniej bardzo grubą idealizacją.

Tak więc model rozwoju nauki, skonstruowany do badania stopnia dokładności naukowy teorii, sam jest modelem przybliżonym i z kolei można by pytać o stopień jego dokładności, na przykład w oparciu o model rozwoju nauki znowu odwołujący się do zasady Banacha. Prowadząc to rozumowanie dalej otrzymalibyśmy typową sytuację *regressio ad infinitum*. Byłoby to oczywiście zabawą raczej jałową. Wydaje się jednak, że wartość dotychczasowych rozważań nie sprowadza się tylko do walorów rozrywkowych. Sądzę, że na ich podstawie można bezpiecznie przyjąć, że zbiór światów możliwych posiada strukturę podobną do struktury przestrzeni Banacha. W przeciwnym razie cały proces naukowego badania świata byłby przedsięwzięciem beznadziejnym.

5. ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Historycznie, jednym z głównych motywów rozwijania teorii przestrzeni Banacha była chęć uściślenia rachunku wariacyjnego. Zasadniczy problem tego rachunku polega na szukaniu ekstremów funkcji określonych na przestrzeniach Banacha. I tu znowu teoria przestrzeni Banacha spotyka się z podstawami fizyki.

Jak wiadomo, równania wszystkich ważniejszych teorii współczesnej fizyki można wyprowadzić z zasady najmniejszego działania [7]. Niech rozważany układ fizyczny *U* zmienia się w czasie. Zgodnie ze standardowymi metodami fizyki teoretycznej wszystkie możliwe drogi jego ewolucji (trajektorie) można przedstawić jako krzywe w pewnej przestrzeni, nazwijmy ją przestrzenią X. Punkt w tej przestrzeni przedstawia możliwy stan rozważanego układu *U* w pewnej chwili. Niech nasz układ, w trakcie swojej ewolucji, przechodzi od stanu *a* do stanu *b*. Wszystkie możliwe drogi ewolucyjne układu *U* stanowią rodzinę krzywych zaczynających się w *a* i kończących się w *b*. Dróg takich jest oczywiście nieskończenie wiele. Którą z nich wybierze układ *U*? Zasada najmniejszego działania mówi, że rzeczywista ewolucja układu *U* potoczy się wzdłuż drogi, na której całka

$$S = \int_a^b L\left(x^i(t), \frac{d\,x^i(t)}{dt}\right) dt \qquad (**)$$

przybiera wartość ekstremalną. Funkcja L, występująca pod znakiem całki, nazywa się lagranżianem, a cała wielkość S — działaniem.

Powiedziałem wyżej, że z zasady tej można wyprowadzić równania wszystkich ważniejszych teorii współczesnej fizyki. Muszę wszakże uczciwie przestrzec czytelnika, że termin „wyprowadzić" został tu przeze mnie nadużyty. Zwykle termin ten stosuje się do sytuacji, w których — jak w matematyce — dobrze wiadomo, co z czego, przy jakich założeniach i przy jakich regułach wnioskowania, wynika. W rozważanej przez nas obecnie sytuacji potrafimy wprawdzie problem matematycznie poprawnie sformułować i w wielu wypadkach rozwiązać, jednakże z fizycznego punktu widzenia jest to raczej pewien algorytm odgadywania różnych teorii niż ich wyprowadzanie.

Przede wszystkim, nie ma żadnej ogólnej teorii konstruowania lagranżianów. Należy tu po prostu stosować wyczucie oraz metodę prób i błędów. Różne lagranżiany wstawione do wzoru (**) produkują różne teorie i ostatecznie zgodność teorii z doświadczeniem decyduje o fizycznej przydatności teorii. Dobierając odpowiednie lagranżiany potrafimy zrekonstruować mechanikę klasyczną, elektrodynamikę klasyczną, ogólną teorię względności, a także mechanikę kwantową. Gdyby nie fakt, że za każdym razem musimy „podstawić" inny lagranżian i nigdy nie wiemy dlaczego właśnie taki a nie inny, zasada najmniejszego działania byłaby doskonałą ideą jednoczącą całą fizykę w jednej, przejrzystej formule.

[7] Jest to nazwa używana tradycyjnie, w zasadzie powinna ona brzmieć: zasada ekstremalnego działania.

Tymczasem jednak musimy zadowolić się tym, co wiemy i systematycznie dziwić się pytaniom wynikającym z naszej wiedzy i uświadamiającym nam jej bolesne ograniczenia. A pytań tych jest wiele. Spróbujmy sformułować niektóre z nich.

Pierwsze pytanie wypowiedzmy słowami Feynmana. Jego słowa dobitnie akcentują siłę zdziwienia, jakie zawsze powinno towarzyszyć naukowo twórczym pytaniom. „...wszystkie nasze instynkty — pisze Feynman — dotyczące przyczyny i skutku stają dęba, gdy słyszymy, że cząstka decyduje, jaką ma drogę wybrać na zasadzie uzyskania na tej drodze najmniejszej wartości działania. Czy wyczuwa ona węchem, które z sąsiadujących ze sobą dróg dadzą więcej, a które mniej działania?" [8] Skąd cząstka (czy ogólniej: dany układ fizyczny) „wie"? — to jedno, a drugie to, dlaczego działanie ma przyjmować wartość ekstremalną, a nie jakąś inną? I — po trzecie — dlaczego działanie właśnie z takim, a nie innym lagranżianem?

Skąd układ wie? Czy zna z góry stan końcowy, do którego dojdzie i wszystkie możliwe drogi, które do niego prowadzą? Czy więc układ zna przyszłość? Ostrość tego pytania można by złagodzić, przyjmując — jak to sugeruje teoria względności — że czasoprzestrzeń istnieje cała na raz, a rozkład czasoprzestrzeni osobno na czas i osobno na przestrzeń jest tylko zabiegiem „sztucznym" dokonywanym w lokalnym układzie odniesienia obserwatora i poza tym układem nie mającym obiektywnego sensu. Przy takim punkcie widzenia podział na przeszłość, teraźniejszość i przyszłość jest tylko konstrukcją obserwatora, której w rzeczywistości nic nie odpowiada, a fizyka nie dzieje się w czasie, lecz j e s t w czasoprzestrzeni [9].

Może tego rodzaju „wyjaśnienie" uspokaja nieco nasze filozoficzne sumienie, ale nie przyczynia się istotnie do zrozumienia fizycznych „mechanizmów" zasady najmniejszego działania.

I dlaczego wartość działania wzdłuż rzeczywistej trajektorii układu ma być ekstermalna? Jedyna próba odpowiedzi, jaka mi się nasuwa, gdy nad tym myślę, jest następująca. Wszystkie inne trajektorie, oprócz ekstremalnej, nie są w żaden sposób wyróżnione. Różnych trajektorii jest nieskończenie wiele; ekstremalna trajektoria — w pewnym swoim otoczeniu — jest tylko jedna. Jeżeli przyroda ma wybierać, a nie działać na ślepo, to istnieje tylko jedno kryterium: wybierać ekstremum.

Żeby ta odpowiedź była w miarę pełna, należałoby jeszcze powiedzieć, dlaczego wzdłuż trajektorii extremum ma osiągać działanie (i to właśnie z takim lagranżianem), a nie jakaś inna wielkość. Na ten temat — o ile

[8] *Feynmana wykłady z fizyki*, t. II, cz. 1. Warszawa 1970, s. 344.

[9] Por. np.: G. J. W h i t r o w, *The Natural Philosophy of Time*, London 1980, s. 344.

wiem — nikomu jeszcze nic mądrego nie przyszło do głowy. Próba uspokojenia się przez twierdzenie, że pytania „dlaczego" nie należą do nauki, jest już rzeczywiście środkiem uspokajającym, i to nieskutecznym. Bo przecież nie jest nigdzie powiedziane, że poza naukami empirycznymi nie wolno stawiać żadnych interesujących pytań.

I jeszcze jedna, ważna uwaga. Mówiłem wiele o tym, że przyroda wybiera, kieruje się takimi czy innymi regułami wyboru itd. Należy to rozumieć wyłącznie w sensie stwierdzenia orzekającego, że w przyrodzie występują ograniczenia możliwości (to właśnie nazywałem wybieraniem przez przyrodę). Reguły wyboru w tym znaczeniu są równoważne temu, że w strukturze przyrody jest zakodowana pewna informacja. Gdyby przyrodzie „wszystko było wolno", nie bylibyśmy w stanie wydobyć z niej żadnych czytelnych informacji (pomijając ten nieistotny szczegół, że wówczas nie mogłoby być nas samych).

Jeżeli ktoś nie lubi takich filozoficznych rozważań, to jedynie sensowną rzeczą, jaką może zrobić dla zasad najmniejszego działania (bo w istocie jest ich wiele, zależnie od postaci lagranżianu), jest zabranie się do dokładnego zbadania ich czysto matematycznej struktury. I wtedy ten ktoś musi znowu natknąć się na przestrzenie Banacha.

Szukanie ekstremum funkcjonału, jakim jest działanie, jest szczególnym przypadkiem poszukiwania ekstremów odwzorowań z jednej przestrzeni Banacha w drugą. I znowu, jeśli przyjąć, że każda możliwa trajektoria jest możliwym „światem", to, o ile zadanie ma być matematycznie porządnie postawione, zbiór wszystkich tego rodzaju możliwych światów winien być przestrzenią Banacha.

6. PYTANIA NA ZAKOŃCZENIE

Czy fakt, że gdy zastanawiamy się — w nieco ściślejszy sposób — nad podstawami fizyki, natykamy się na przestrzenie Banacha, ma jakieś głębsze znaczenie, czy też jest on trywialnym następstwem tego, że współczesna nauka do opisu świata używa funkcji, a przestrzenie Banacha są po prostu bardzo wygodnymi przestrzeniami funkcyjnymi?

Jako komentarz do tego pytania mam następne pytania. Czy w podstawach fizyki, które są tak mało zbadane, są pytania trywialne, a jeżeli tak, to jak je odróżnić od pytań nietrywialnych? Czy nie jest tak, że o trywialności pytania można się przekonać dopiero po uzyskaniu na nie odpowiedzi? Ale czy pytanie, na które uzyskuje się odpowiedź może być pytaniem trywialnym? I wreszcie, czy wygoda matematyczna, gdy idzie o opis świata — lub lepiej: o rekonstrukcję jego struktury — nie świadczy o głębszych związkach pomiędzy daną strukturą matematyczną a strukturą świata?

Współczesna fizyka jest dziwnym przykładem pięknego gmachu wznoszącego się na wiotkich fundamentach. Każda próba ich wzmocnienia — choćby metodą prowizorycznego podpierania pytaniami — powinna być witana jako inicjatywa pożyteczna ze względów publicznego bezpieczeństwa.

NOTA BIBLIOGRAFICZNA

Czytelnika, który zainteresował się poruszonymi przeze mnie problemami i chciałby stworzyć sobie szerszą podstawę do własnych przemyśleń, odsyłam do następujących książek, które i mnie służyły pomocą przed i w trakcie pisania niniejszego eseju.

Podstawowym „źródłem" może być matematycznie bardzo bogata książka: K. Maurin, *Analiza*, Cz. 1: *Elementy*, Warszawa 1971 (wznowienie w 1977 r.), zwłaszcza rozdziały 7 i 8. Przestudiowanie tej książki daje warsztat i pewien smak matematyczny, ale nie jest zadaniem łatwym. Można sobie pomagać klasyczną już pozycją: L. A. Lusternik, W. L. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, Warszawa 1959, lub bardzo poglądowo napisaną książką: K. Sieklucki, *Geometria i topologia*. Cz. 1: *Geometria*, Warszawa 1978, zwłaszcza rozdział 2, w którym można znaleźć informacje o przestrzeniach zupełnych, i rozdział 4 o przestrzeniach unormowanych. Autora interesuje jednak aspekt geometryczny, a nie funkcjonalny poruszanych zagadnień i dlatego tylko na lekturze tej książki poprzestać nie można.

Zwięzły przegląd teorii Banacha daje piękna książka: Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Monifolds and Physics*, North Holland Publ. Comp, Amsterdam—New York—Oxford 1978. Rozdział 2. tej książki omawia w zwięzły sposób rachunek różniczkowy na przestrzeniach Banacha. Sekcja B tego rozdziału jest poświęcona rachunkowi wariacyjnemu. Książka jest adresowana do fizyków-teoretyków. W ćwiczeniach można znaleźć niektóre zastosowania omawianych zagadnień do fizyki.

Jedyną, jaką znam, książką poświęconą w całości zasadom wariacyjnym w fizyce jest: A. Mercier, *Analytical and Canonical Formalism in Physics*, Dover Publications, New York 1963. Książka ta jednak nie może zastąpić grzebania w różnych podręcznikach fizyki, celem wyłowienia z nich pożytecznych informacji na temat zasad najmniejszego działania. W tych poszukiwaniach nie powinno się ominąć XIX-go rozdziału z książki: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, t. II cz. 1, Warszawa 1970, s. 330—352. W rozdziale tym Feynman opowiada, jak nauczyciel gimnazjalny zainteresował go fizyką przez zwrócenie jego uwagi na zagadki tkwiące w zasadzie najmniejszego działania. W prosty, ale głęboki sposób Feynman przedstawia swoje poglądy na to pasjonujące zagadnienie.

ESSAY ON BANACH SPACES

Summary

The structure of the world, as reconstructed by contemporary physics, is made out of mathematical functions. Functional spaces, which are standard tools of theoretical physics, are usually Banach spaces. Their nature, as generalization of vector spaces, is briefly presented. It turns out that Banach spaces appear not only in foundations of physics (for example, in a rigorous treatment of the least action principle) but also in a modelling of the very process of physical theories development. Is this a trivial consequence of our convention to describe the world in terms of functions and of the fact that Banach spaces are nice functional spaces or has this fact a deeper philosophical meaning?