Semina Scientiarum
Nr 14 2015
s. 35–48
DOI: http://dx.doi.org/10.15633/ss.1077

Marlena Fila

Filozofia i logika intuicjonizmu

1. Charakterystyka filozofii intuicjonistycznej

Intuicjonizm to jeden z nurtów konstruktywistycznych w filozofii matematyki powstały na przełomie XIX i XX wieku. Jego twórcą był Luitzen Egbertus Jan Brouwer – matematyk holenderski, a jednym z najważniejszych przedstawicieli Arend Heyting – uczeń Brouwera. Wśród prekursorów intuicjonizmu wymienić należy Kroneckera, Poincaré oraz Mannourry'ego – nauczyciela Brouwera[1].

Intuicjonizm powstał w odpowiedzi na kryzys, jaki pojawił się w podstawach matematyki wraz z odkryciem antynomii[2] na gruncie teorii mnogości Georga Cantora. Źródło błędów w matematyce widział Brouwer w dowodach niepodających konstrukcji postulowanych obiektów. Chcąc zaradzić groźbie sprzeczności w matematyce, odrzucił wszelkie dowody niekonstruktywne logiki klasycznej. Podważył też prawo wyłączonego środka i prawo podwójnego prze-

[1] Więcej o początkach nurtu intuicjonistycznego przeczytać można w: M. Fila, *Prądy konstruktywistyczne w filozofii matematyki*, praca magisterska napisana w Zakładzie Logiki Matematycznej Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu pod kierunkiem prof. dra hab. R. Murawskiego oraz w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 1995, s. 67–72, 83–136.

[2] Antynomie – pary zdań wzajemnie sprzecznych w równym stopniu zasługujące na przyjęcie. Najbardziej znane to antynomia Russella, antynomia zbioru wszystkich liczb kardynalnych, zbioru wszystkich liczb równolicznych z danym zbiorem czy – znane już Cantorowi – antynomia zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich liczb porządkowych oraz antynomia zbioru podzbiorów danego zbioru.

czenia; krytykował aksjomat wyboru – był on dla niego jaskrawym przykładem postulowania istnienia zbioru, którego myśl nie jest na ogół w stanie określić.

Swe poglądy najpełniej wyraził Brouwer w swojej dysertacji doktorskiej z roku 1907 *Over de Grondlagen der Wiskunde* oraz w wykładzie wygłoszonym pięć lat później z okazji objęcia stanowiska profesora na Uniwersytecie w Amsterdamie[3].

W swoim spojrzeniu na matematykę nawiązywał Brouwer do Arystotelesa i Euklidesa – matematyka była dla niego nauką wyposażoną w określoną treść. Odrzucał jednak metodę aksjomatyczną jako metodę budowania i ugruntowywania matematyki. Jego zdaniem nie można tylko postulować istnienia obiektów matematycznych, trzeba je uprzednio skonstruować. Owe konstrukcje matematyczne są jego zdaniem niezależne od języka. Matematyka znajduje się w umyśle ludzkim, nie na papierze, a język służy matematykowi tylko do komunikowania myśli i błędem jest go analizować.

Bardzo dużo jest w filozofii Brouwera nawiązań do myśli Kanta. Za Kantem powtarzał Brouwer, że umysł ludzki bezpośrednio ujmuje przedmioty matematyki i formułuje o nich sądy syntetyczne *a priori*. Zdaniem Brouwera u podstaw matematyki leży fundamentalna definicja apriorystycznego czasu. Kant mówił o aprioryczności czasu i przestrzeni, jednak odkrycie geometrii nieeuklidesowych zmusiło Brouwera do odrzucenia aprioryczności przestrzeni.

Dla Brouwera matematyka była funkcją intelektu ludzkiego i wolną życiową aktywnością rozumu; wytworem umysłu ludzkiego, a nie teorią, systemem reguł i twierdzeń. Twierdzenia arytmetyki były dla Brouwera sądami syntetycznymi *a priori*, a obiekty matematyczne były konstrukcjami myślowymi (idealnego) matematyka. Przeciwstawiał się więc platonizmowi, który przypisuje obiektom matematycznym istnienie niezależnie od czasu, przestrzeni i poznającego podmiotu. Przeciwny był też formalizmowi – ścisłość, jego zdaniem, powinna być ugruntowana w umyśle ludzkim, a nie na papierze.

---

[3] Chodzi o wykład z 1912 roku pt. *Intuitionisme en formalisme*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, R. Murawski, Poznań 1994, s. 263–275.

W konsekwencji musiał Brouwer odrzucić logikę klasyczną, w której każde zdanie sensowne jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Odrzucił także istnienie nieskończoności aktualnej. Argumentował to faktem, że umysł nie może wykonać nieskończenie wielu konstrukcji. Dlatego zbiór nieskończony rozumiał jako ideę tworzenia wciąż nowych jego elementów. Taki zbiór jest jednak zawsze przeliczalny, dlatego nie ma – zdaniem Brouwera – zbiorów nieprzeliczalnych ani liczb kardynalnych innych niż alef zero.

Zamierzeniem Brouwera była rekonstrukcja matematyki na bazie zasad intuicjonistycznych. Po 1912 roku dokonał rewizji pojęcia kontinuum, a po 1923 roku rekonstrukcji części teorii zbiorów punktowych, teorii funkcji; rozwinął teorię przeliczalnych dobrych porządków i – wraz ze swoim studentem B. de Loorem – podał intuicjonistyczny dowód zasadniczego twierdzenia algebry. Po 1928 roku dzieło kontynuowali jego uczniowie: Belinfante i Arend Heyting, M. Joost[4], a potem uczniowie Heytinga.

2. Logika intuicjonistyczna Heytinga

Poglądy Brouwera budziły zainteresowanie nie tylko wśród matematyków, lecz także wśród logików. Opisu logiki zgodnej z intuicjonistycznym stanowiskiem Brouwera dostarczył Arend Heyting w pracy z roku 1930 *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* To właśnie Heytingowi – uczniowi Brouwera – zawdzięczamy sprecyzowanie intuicjonistycznych sposobów wnioskowania przez aksjomatyzację intuicjonistycznego rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów. Jego praca była pierwszą prezentacją intuicjonizmu wolną od niejasności i wieloznaczności; napisaną w języku zrozumiałym dla ogółu logików i matematyków. Umożliwiała porównanie logiki klasycznej i logiki intuicjonistycznej.

[4] Belinfante Heyting: intuicjonistyczna teoria funkcji zespolonych, Arend Heyting: intuicjonistyczna geometria rzutowa i algebra, logika intuicjonistyczna; uczniowie Heytinga: intuicjonistyczna topologia, teoria mocy, teoria przestrzeni Hilberta i geometria afiniczna.

Sam Brouwer miał jednak bardzo sceptyczny stosunek zarówno do stworzonego przez Heytinga systemu, jak i do samych prób kodyfikacji logiki intuicjonistycznej. Jego negatywne podejście wynikało m.in. z poglądów dotyczących używanego przez matematyków języka. Jak już wspomniano w paragrafie wyżej, matematyka była dla Brouwera wolną aktywnością rozumu, a język służył matematykowi tylko do komunikowania myśli. Jakiekolwiek przedstawienie procesów myślowych w języku logiki symbolicznej jest nieadekwatne, ponieważ nie jest możliwe wyczerpanie ogółu wszystkich procesów myślowych, które mogą być traktowane jako uprawnione. Język logiki symbolicznej ma bowiem charakter statyczny i nie jest w stanie opisać dynamicznej i nigdy nie zamkniętej dziedziny matematycznej działalności człowieka.

W intuicjonistycznej logice Heytinga podstawą jest jedenaście aksjomatów:

1. Prawo tautologii	$p \rightarrow p \wedge p$;
2. Prawo przemienności dla iloczynu	$p \wedge q \rightarrow q \wedge p$;
3. Prawo czynnika (obie strony implikacji można pomnożyć przez dowolny czynnik)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$;
4. Prawo sylogizmu	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$;
5. Prawo Dunsa Szkota (prawda wynika ze wszystkiego)	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$;
6. Modus Ponens	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$;
7. Prawo symplifikacji dla sumy	$p \rightarrow p \vee q$;
8. Prawo przemienności dla sumy	$p \vee q \rightarrow q \vee p$;
9. Prawo kompozycji	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$;
10. Drugie prawo Dunsa Szkota (ze sprzeczności wynika wszystko)	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$;
11. Prawo redukcji do absurdu	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$.

Z powyższych aksjomatów przy pomocy reguł wnioskowania: reguły podstawiania i reguły odrywania[5] dedukuje się twierdzenia. Istotne jest, że dla Heytinga zdaniem prawdziwym było tylko takie zdanie, które było dowodliwe.

Brouwer – jak już wspomniano – zmuszony był odrzucić dwuwartościową logikę klasyczną między innymi dlatego, że nie akceptował zasady wyłączonego środka. Jego zdaniem bezwzględnej prawdziwości tej zasady nie można wykazać, ale nie jest ona równocześnie fałszywa, dlatego można powiedzieć, że ma ona trzecią wartość logiczną. Logika Heytinga – adekwatna dla filozofii Brouwera – nie mogła być zatem dwuwartościowa. Skoro logika Heytinga nie jest dwuwartościowa, powstaje pytanie o wartość logiczną tej trzeciej wartości i związki logicznej implikacji, koniunkcji i alternatywy. Heyting przyjął, że negacją tej trzeciej wartości jest fałsz[6]. Matryce przedstawiają się następująco:

Matryca negacji:

p	¬ p
1	0
0	1
½	0

Matryca implikacji:

p \ q	1	0	½
1	1	0	½
0	1	1	1
½	1	0	1

Matryca alternatywy:

p \ q	1	0	½
1	1	1	1
0	1	0	½
½	1	½	½

Matryca koniunkcji:

p \ q	1	0	½
1	1	0	½
0	0	0	0
½	½	0	½

Widać analogię do klasycznej logiki dwuwartościowej w wartościowaniu par zdań: 1 1, 1 0, 0 1, 0 0. Wartości logiczne implikacji, koniunkcji i alternatywy pięciu nowo powstałych par zdań:

[5] Reguła podstawiania: jeżeli dana formuła rachunku zdań jest tautologią i wszystkie wystąpienia pewnej zmiennej zdaniowej w tej tautologii zastąpimy pewną ustaloną formułą, to otrzymana w ten sposób formuła również będzie tautologią. Reguła odrywania: dla każdej tautologii w formie implikacji, której poprzednik również jest tautologią, następnik także jest tautologią.

[6] Ciekawe jest porównanie logiki Heytinga do trójwartościowej logiki Łukasiewicza. Patrz: M. Fila, *Prądy konstruktywistyczne w filozofii matematyki*, dz. cyt., s. 52n.

1 ½,½ 1, 0 ½, ½ 0, ½ ½ Heyting musiał przyjąć w taki sposób, aby jak najmniej odbiegały od intuicji. Zależności zawarte w matrycach można opisać w następujący sposób:

Implikacja: $p \rightarrow q = \begin{cases} 1, \, gdy \; p \leq q \\ q, \, gdy \; p > q \end{cases}$

Koniunkcja: $p \wedge q = \min \{p, q\}$

Alternatywa: $p \vee q = \max \{p, q\}$

Nie chcąc zbytnio zagłębiać się w system Heytinga, zwróćmy tylko uwagę na fakt, że – zgodnie z poglądami Brouwera – nie są w nim tautologiami prawo podwójnego przeczenia oraz prawo wyłączonego środka. Sprawdzenie tych faktów ilustruje poniższa tabela:

p	¬ p	p∨¬ p	¬¬ p	¬¬ p → p
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
½	0	½	1	½

Warty uwagi jest fakt, że zaprzeczenia tych zasad są w macierzowej konstrukcji Heytinga zawsze fałszywe. Dla negacji zasady wyłączonego środka mamy bowiem:

p	¬ p	p∨¬ p	¬ (p∨¬ p)
1	0	1	0
0	1	1	0
½	0	½	0

Natomiast dla negacji zasady niesprzeczności mamy:

p	¬ p	p∧¬ p	¬ (p∧¬ p)	¬¬ (p∧¬ p)
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
½	0	0	1	0

3. Twierdzenie Gödla

Niedługo potem okazało się, że system Heytinga posiada pewną własność, której posiadać nie powinien. Jego aksjomatyka jest bowiem nieadekwatna w stosunku do matryc prawdziwościowych. Znaczy to tyle, że matryce spełniane są nie tylko przez aksjomaty Heytinga i tezy z nich wynikające, ale również przez formuły, które z aksjomatów Heytinga nie wynikają, więc do systemu nie należą. Z uwagi na to, że aksjomaty miały decydującą rolę w reformie matematyki, jaką Brouwer i Heyting chcieli przeprowadzić, stało się oczywiste, że matryce muszą zostać poprawione.

Twierdzenie Kurta Gödla z 1932 roku[7] o nieadekwatności skończenie wartościowych matryc do systemu Heytinga było pewnym przełomem w rozwoju logiki intuicjonistycznej. Gödel pokazał, że nie można intuicjonistycznego rachunku zdań rozpatrywać na podstawie jakichkolwiek tabeli prawdziwościowych o skończonej liczbie wartości logicznych. Zawsze istnieć będzie formuła logiczna spełniająca matrycę, ale niewynikająca z aksjomatów Heytinga, dlatego żadna matryca o skończonej liczbie wartości nie może być dla systemu Heytinga adekwatna.

Gödel udowodnił to w następujący sposób:

Utwórzmy sumę logiczną z równoważności zachodzących między zmiennymi zdaniowymi:

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \leftrightarrow p_4) \vee (p_1 \leftrightarrow p_n) \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee \ldots \vee (p_{n-1} \leftrightarrow p_n).$$

Formuła powyższa będzie spełniona przez każdą matrycę co najwyżej n-1 wartościową i spełniającą aksjomaty Heytinga. Gdyby bowiem każdej zmiennej próbować nadać inną wartość, to w co najmniej jednej z równoważności zmienne otrzymają tę samą wartość, bo – z założenia – wartości tych jest mniej niż zmiennych. Zatem co najmniej jedna równoważność będzie prawdziwa. Stąd i prawdziwa będzie cała zdefi-

[7] Artykuł pt. *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*. Por. Z. Zawirski, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny” 16 (1946), s. 165–222.

niowana wyżej suma, bowiem prawdziwość jednego członu alternatywy zagwarantuje prawdziwość całej formuły.

Pozostało wykazać niezależność powyższej formuły od aksjomatów Heytinga, czyli fakt, że nie można jej w tym systemie udowodnić. W tym celu należy znaleźć taką interpretację zmiennych, dla której aksjomaty będą spełnione, a nie będzie spełniona formuła. Podana przez Gödla tabela interpretacyjna ma n zmiennych: 1, 2, …, n, a wartością wyróżnioną jest w niej 1. Oraz:

$$p \to q = \begin{cases} 1, gdy\ p \geq q \\ q, gdy\ p < q \end{cases} \qquad \neg p = \begin{cases} n, gdy\ p \neq n \\ 1, gdy\ p = n \end{cases}$$

$$p \vee q = \min \{p, q\} \qquad p \wedge q = \max \{p, q\}$$

Dla powyższych wartości aksjomaty Heytinga są spełnione. Powyższa formuła również je spełnia, ale tylko wówczas, gdy liczba zmiennych zdaniowych p_n jest większa niż n. W przeciwnym wypadku formuła ta nie będzie spełniać zdefiniowanych wartości. Jest zatem niezależna od aksjomatów Heytinga[8].

Zatem matryca adekwatna dla logiki Heytinga musi być nieskończenie wielowartościowa. Z powyższego dowodu wynika jeszcze jeden wniosek: między systemem zwykłego rachunku zdań a systemem Heytinga leży nieskończenie wiele systemów – monotonicznie malejący ciąg systemów, w których zawiera się system Heytinga, a które zawarte są w logice dwuwartościowej.

4. Badania Jaśkowskiego

Stało się więc oczywiste, że matryca adekwatna dla systemu Heytinga musi być nieskończenie wielowartościowa. Trzy lata póź-

[8] Dowód zaczerpnięto z: M. Fila, *Prądy konstruktywistyczne w filozofii matematyki*, dz. cyt., na podstawie: Z. Zawirski, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, dz. cyt., s. 204–206.

niej w „Aktach Kongresu Międzynarodowego Filozofii Naukowej”[9] zostały opublikowane badania Jaśkowskiego. Matryce adekwatne dla systemu Heytinga okazały się dużo bardziej skomplikowane, niż na początku przypuszczano. Obok głównego kierunku rozbudowywania matryc są bowiem także rozgałęzienia boczne, a każde z nich dostarcza nieskończonego ciągu nowych matryc.

Główny kierunek rozbudowywania matryc przedstawia się następująco: niech 1 oznacza prawdę. Jest to wartość wyróżniona we wszystkich matrycach. Pozostałe wartości – niewyróżnione – w następujących po sobie matrycach stele wzrastają o 1. Wprowadzamy funkcję α taką, że gdy jej argument ma wartość wyróżnioną, to jej wartością staje się nowa wartość, której w poprzedniej matrycy nie było. W przeciwnym wypadku (tj. gdy argument funkcji α nie ma wartości wyróżnionej) wartość funkcji α się nie zmienia.

Powyższy – dość zawiły – opis można spróbować wyjaśnić na przykładzie. W logice jednowartościowej jedyną wartością jest 1 – wartość wyróżniona. Przechodząc do logiki dwuwartościowej, wprowadza się nową wartość logiczną – wartość niewyróżnioną – „fałsz” – i oznacza ją przez 0. Zatem zgodnie z powyższym opisem α(1) = 0. Chcąc przejść do logiki trójwartościowej – analogicznie – wprowadza się nową wartość i oznacza ją przez 2. Zatem teraz α(1) = 2 oraz α(0) = 0. Dla logiki czterowartościowej: α(1) = 3, α(0) = 0, α(2) = 2.

Wprowadzenie funkcji α umożliwia podanie ogólnych tabeli budowy kolejnych matryc. Oznaczając: N – negacja, K – koniunkcja, A – alternatywa i C – implikacja, gdzie dla implikacji p jest poprzednikiem, a q następnikiem, i zakładając, że znamy budowę tych matryc w logice n-wartościowej, matryce N^*, C^*, K^*, A^* w logice n+1 wartościowej są następujące:

N*	
1	α(N1)
α(p)	Np

C*	1	α(q)
1	C11	α(C1q)
α(p)	Cp1	Cpq

[9] Tom 6, *Recherches sur le système de la logique intuitioniste.*

K*	1	α(q)
1	K11	α(K1q)
α(p)	α(Kp1)	α(Kpq)

A*	1	α(q)
1	A11	A1q
α(p)	Ap1	α(Apq)

Dla przykładu – w logice jednowartościowej (p = Np = N1 = 1):

N*	
1	α(1)
α(1)	1

C*	1	α(1)
1	1	α(1)
α(1)	1	1

K*	1	α(1)
1	1	α(1)
α(1)	α(1)	α(1)

A*	1	α(1)
1	1	1
α(1)	1	α(1)

W logice dwuwartościowej (pamiętając, że α(1) = 0) wartości w matrycach pokrywają się z wartościami matryc logiki klasycznej:

N*	
1	0
α(1)	1

C*	1	α(1)
1	1	0
α(1)	1	1

K*	1	α(1)
1	1	0
α(1)	0	0

A*	1	α(1)
1	1	1
α(1)	1	0

W logice trójwartościowej (gdzie α(1) = 3, a wartości niewyróżnione 0 i 2 przejdą na siebie):

N*	
1	α(N1)=0
α(1)	N1=0
α(0)	N0=1

C*	1	α(1)	α(0)
1	C11=1	α(C11)=2	α(C10)=0
α(1)	C11=1	C11=1	C10=0
α(0)	C01=1	C01=1	C00=0

K*	1	α(1)	α(0)
1	K11=1	α(K11)=2	α(K10)=0
α(1)	α(K11)=2	α(K11)=2	α(K10)=0
α(0)	α(K01)=0	α(K01)=0	α(K00)=0

A*	1	α(1)	α(0)
1	A11=1	A11=1	A10=1
α(1)	A11=1	α(A11)=2	α(A10)=2
α(0)	A01=1	α(A01)=2	α(A00)=0

Odgałęzienia boczne systemu Stanisława Jaśkowskiego, o których była mowa na początku paragrafu, także spełniają aksjomaty Heytinga. Proces przechodzenia z matrycy M do następnej matrycy N nazwał Jaśkowski operacją Γ wykonaną na matrycy M. Mówi się: N jest Γ(M). Wykonawszy operację Γ na jednym systemie, otrzymuje się następny system. Dzieje się tak dlatego, że system tak samo wyznaczony jest przez matrycę, jak i przez zbiór aksjomatów. Zbiór wyrażeń logicznych spełniających matrycę M oznacza się przez E(M).

Dla przykładu: operacja Γ wykonana na systemie logiki jednowartościowej L_1 daje w wyniku logikę dwuwartościową L_2, zatem L_2 jest $\Gamma(L_1)$. Zauważmy, że skoro w logice jednowartościowej pozostają w mocy prawa logiki dwuwartościowej, w logice dwuwartościowej pozostają w mocy prawa logiki trójwartościowej itd., to E(Γ(M))cE(M). Inkluzja odwrotna na ogół nie zachodzi.

Nowy typ matryc, który spełnia system Heytinga, wymaga wprowadzenia pojęcia mnożenia matryc. Za Jaśkowskim – 0 i 1 to wartości logiczne. Z nich można utworzyć uporządkowane pary wartości (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0). Niech N(p, q) = (Np, Nq) oraz C(p, q)(r, s) = (Cpr, Cqs), A(p, q)(r, s) = (Apr, Aqs), K(p, q)(r, s) = (Kpr, Kqs), gdzie p, q, r, s ∈ {0, 1}. Poniżej podano przykłady matryc otrzymanych w wyniku pomnożenia przez siebie dwóch matryc:

N	
11	00
10	01
01	10
00	11

Matryca otrzymana w wyniku takiego pomnożenia dwóch dwuwartościowych matryc negacji.

C	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	11	11	01	01
01	11	10	11	10
00	11	11	11	11

Matryca implikacji otrzymana w wyniku pomnożenia przez siebie dwóch dwuwartościowych macierzy implikacji.

Mnożone przez siebie matryce nie muszą być równowartościowe. (Mnożąc na przykład matrycę dwuwartościową z matrycą trójwartościową, otrzyma się matrycę sześciowartościową). W ten sposób można tworzyć iloczyny nie tylko dwóch, ale też trzech i więcej matryc. Ponadto każdy z tych iloczynów może podlegać operacji Γ, dając początek nowemu ciągowi nieskończonemu.

Jak przekonać się teraz, że każda formuła Heytinga spełnia tę nieskończoną liczbę matryc? W tym celu pomocne będzie następujące twierdzenie: jeżeli aksjomaty Heytinga (a więc i cały system) spełniają pewną matrycę M, to spełniają także następnik tej matrycy – matrycę Γ(M). W swoim artykule Zygmunt Zawirski[10] opisuje rozumowanie dowodowe Jaśkowskiego i pokazuje zasadność tego twierdzenia na podstawie aksjomatów przez niego sformułowanych. Jaśkowski zauważył bowiem, że Heyting przyjął za prawdziwe także zdanie: $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$. Aksjomaty Heytinga, których po dopisaniu tego zdania jest dwanaście, Jaśkowski sprowadza do następujących dziesięciu:

1. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$
4. $p \wedge q \rightarrow p$
5. $p \wedge q \rightarrow q$
6. $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
7. $p \rightarrow p \vee q$
8. $q \rightarrow p \vee q$
9. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
10. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

Podsumowanie

Intuicjonizm Brouwera był dość oryginalną reakcją na powstały w podstawach matematyki kryzys. Mimo sceptycznego stanowiska Brouwera i tezy, że matematyka jest niezależna od języka, podjęto się prób skonstruowania logiki odpowiedniej dla filozoficznych tez intuicjonizmu. System zaproponowany przez Heytinga zdawał się poprawny aż do roku 1932, kiedy to Kurt Gödel wykazał, że matryce Heytinga nie są adekwatne do sformułowanych przez niego aksjomatów. Rozwiązanie tego problemu znalazł Jaśkowski, kon-

[10] Z. Zawirski, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, dz. cyt., s. 165–222.

struując nieskończony ciąg matryc adekwatny dla systemu Heytinga. Skonstruowanie systemu logicznego, który byłby adekwatny dla intuicjonistycznej filozofii Brouwera, okazało się zadaniem trudniejszym niż na początku przypuszczano. Sama logika intuicjonistyczna znalazła zastosowanie w matematyce jako użyteczne narzędzie, na przykład w teorii toposów czy w informatyce.

Summary

The philosophy and logic of intuitionism

At the end of the 19th century in the fundamentals of mathematics appeared a crisis. It was caused by the paradoxes found in Cantor's set theory. One of the ideas a resolving the crisis was intuitionism – one of the constructivist trends in the philosophy of mathematics. Its creator was Brouwer, the main representative was Heyting.

In this paper described will be attempt to construct a suitable logic for philosophical intuitionism theses. In second paragraph Heyting system will be present – its axioms and truth tables. Later Gödel theorem about the inadequacy of finite dimensional matrices for this system will be explained. At the end this paper an infinite sequence of matrices adequate for Heyting axioms proposed by Jaśkowski will be described.

Keywords intuitionism, axioms, truth tables, Heyting system, Gödel theorem about the inadequacy of finite dimensional matrices for Heyting system, infinite sequence of matrices

Bibliografia

Brouwer L. E. J., *Intuitionisme en formalisme*, Amsterdam 1912, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, R. Murawski, Poznań 1994, s. 263–275.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 1995, s. 67–72, 83–136.

Zawirski Z., *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny" 16 (1946), s. 165–222.

Zinowiew A., *Filozoficzne problemy logiki wielowartościowej*, Warszawa 1963.