Semina □ Nr 1
Scientiarum 2002

Paweł Polak

Rozwój pojęcia nieskończoności. Dialog pomiędzy filozofią a matematyką

Wstęp

Kiedy przyglądamy się pojęciu nieskończoności, już na pierwszy rzut oka zauważamy, że dwie dziedziny nauki odegrały główną rolę w rozwoju tego pojęcia. Były to filozofia i matematyka[1]. Jeżeli skupimy uwagę na początkowej fazie rozwoju to zauważymy, że dyscypliny te prowadziły swoisty dialog, dzięki któremu w ogóle stało się możliwe efektywne mówienie o czymś takim jak nieskończoność. Prześledźmy zatem najistotniejsze etapy ewolucji pojęcia nieskończoności[2] w okresie pomiędzy VI a IV w. p. n. e.

Historia dialogu

Pojęcie nieskończoności jest jedną z bardziej niejasnych i paradoksalnych idei. Wiąże się to z pewnością z faktem, że nieskończoność wykracza poza granice naszego codziennego doświadczenia. Zawodzą więc często nasze potoczne intuicje i pojawiają się paradoksy. Jednakże z drugiej strony nieskończoność jest w pewien sposób bliska człowiekowi, ponieważ wpisuje się w wyczuwalną przez niego potrzebę transcendencji.

Źródłosłów pojęcia „nieskończoność” odsyła nas do tego, co nie–skończone, czyli:

[1] Dla ścisłości trzeba zaznaczyć, że inne dziedziny naukowe miały również swój udział w ewolucji pojęcia nieskończoności; zajmuje ono bowiem ważne miejsce na gruncie wielu dyscyplin. Niestety ramy tego opracowania nakazują ograniczyć się tylko do dwóch wymienionych dziedzin.

[2] Do opisu zagadnień związanych z nieskończonością używać będę często dzisiejszego aparatu pojęciowego. Jest to jedyny sposób umożliwiający przejrzyste ukazanie źródeł problemów.

1. bezgraniczne, nieograniczone;
2. przekraczające to co skończone, ale również trancendujące to wszystko, co nam potocznie dostępne.

W pierwszym znaczeniu nieskończoność pojawia się u samych początków rozwoju myśli filozoficznej. Pierwszą wzmiankę odnajdujemy w VI w. p. n. e. u Anaksymandra (609 lub 610 – 547 lub 546 r. p. n. e.). Używa on pojęcia $\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ (gr. apeiron — bezkres) na określenie ilościowej własności pierwotnej materii[3]. Apeiron oznacza m. in. bezgraniczność. Przyjęcie takiego określenia pierwotnej zasady było konieczne, aby wytłumaczyć możliwość ciągłego powstawania świata. Jeżeli bowiem zasada byłaby ograniczona, to w końcu kiedyś wyczerpałaby się. Pojęcie apeironu odpowiada podstawowym intuicjom związanym z nieskończonością — jest to coś, czego jest bardzo, bardzo dużo. Tak dużo, że nawet ciągłe odejmowanie odeń części, nigdy nie wyczerpie tej ilości. Można powiedzieć w dzisiejszym języku, że odejmowanie skończonych części nie zmienia nieskończonej ilości aperionu[4]. Otrzymaliśmy w ten sposób pierwsze określenie pojęcia nieskończoności, które dokonało się na gruncie filozofii.

Kolejny głos w dyskusji o nieskończoności został wypowiedziany w V w. p. n. e. w szkole Eleatów. Tam właśnie pojęciu niezmiennego i wiecznego bytu, przypisano własność nieskończoności. Źródła podają, że po raz pierwszy uczynił to *explicite* Melissos, przypisując bytowi nieskończoność w czasie i nieskończoność w przestrzeni.

Znaczący wpływ wywarły aporie sformułowane przez Zenona z Elei. Argumenty Zenona wskazały, że pojęcie nieskończoności może generować antynomie. Pojęcie nieskończoności, jawiące się poprzez aporie Zenona, nadal pozostało niezwykle niejasne i skomplikowane — nie rozdzielono nawet problemu nieskończonego podziału i nieskończoności krańców.

[3]Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii. Filozofia starożytna i średniowieczna. T. 1*, PWN, Warszawa 1983, s. 27–28.

W. Tatarkiewicz sugeruje, że wczesna myśl grecka zrodziła pojęcie nieskończoności być może pod wpływem myśli Wschodu. Niestety autor nie podaje żadnych argumentów opartych na danych źródłowych na poparcie tej tezy. Jedyną przytoczoną przez Tatarkiewicza przesłanką (niestety słabą) jest fakt, że uformowana myśl grecka, gdy stała się w pełni samodzielna, skłoniła się ku przeciwnej koncepcji świata.

[4]Przyjmujemy tu milcząco, że świat Anaksogarasa, w przeciwieństwie do pierwszej zasady, był skończony. (W kosmologii Anaksagorasa powiedziane jest bowiem, że świat otoczony jest przez wszechogarniający ogień, czyli jest ograniczony, a więc skończony. Pozostaje jeszcze problem, jaka była natura owego ognia. Wydaje się, że najbliższe prawdy jest pojmowanie go również jako skończonego).

Aby dokonać tego kroku trzeba będzie poczekać, aż do czasu podjęcia przez Arystotelesa prac nad ruchem. Na razie jednak filozofia nie mogła samodzielnie pójść dalej, brakowało bowiem danych, w jakim kierunku należałoby zdążać.

*

Niemal równocześnie zrodziła się matematyka traktowana jako dyscyplina naukowa, w której również pojawia się pojęcie nieskończoności[5]. Powstaje ważne pytanie, czy da się w omawianym okresie oddzielić matematykę od filozofii? Częstokroć bowiem te same osoby zajmowały się zarówno problemami matematycznymi jak i filozoficznymi, np. Arystoteles.

Podział taki wydaje się uzasadniony z tej racji, że od samego początku matematyce towarzyszyła świadomość odrębności i specyfiki przedmiotu badań. Nieco mniej wyraźna była odrębność metody matematycznej — wszak w filozofii powstały wówczas również systemy dedukcyjne. Najbliższy matematycznej metodzie aksjomatycznej jest chyba system Parmenidesa, który z pierwszej zasady wyprowadzał na drodze dedukcyjnej całą wiedzę, abstrahując od konfrontacji wyników z doświadczeniem. Należy jednak zauważyć, że Parmenides nie opiera swego systemu na przyjętym aksjomacie, lecz podstawowe twierdzenie usiłuje uzasadnić epistemologicznie[6].

Należy zastanowić się jeszcze nad naturą nauki rozwijanej w kręgu pitagorejskim. Na pierwszy rzut oka można by powiedzieć, że matematyka i filozofia tworzyły tam jeszcze jedną naukę. Bliższe spojrzenie ukazuje jednak, że podejście takie nie jest usprawiedliwione. Pitagorejczycy prowadzili bowiem badania stricte matematyczne, odkrywając ważne twierdzenia geometryczne. To właśnie zainteresowania matematyką nadały wyjątkowy kształt filozofii pitagorejskiej, w której liczbę zaczęto traktować jako zasadę bytu. Mimo silnych związków, filozofia i matematyka istniały już jako świadome swej odrębności dziedziny.

Na koniec tej dygresji można dodać jeszcze, że Arystoteles zauważył fakt, iż to właśnie pitagorejczycy pierwsi zajęli się matematyką i spowodowali jej rozwój[7]. Odrębność filozofii i matematyki była zatem widoczna już dla współczesnych.

---

[5]Początki matematyki jako nauki przyjmujemy zwykle w starożytnej Grecji, zaś rachunkowym umiejętnościom Babilończyków, czy geodezyjnym sprawnościom Egipcjan przypisujemy jedynie czysto techniczne znaczenie. (Por. J. Pikul, *Obecność tradycyjnych wątków filozoficznych we współczesnej filozofii matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXIII (1999), s. 89).

[6]Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii...*, ss. 34–36.

[7]Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii...*, s. 55.

*

Powróćmy do rozważań o rozwoju pojęcia nieskończoności na gruncie matematyki. Już w V w. p. n. e. Antyfon podjął zagadnienie procedury wyznaczania pól figur. Zajął się on problemem kwadratury koła[8]. Zaproponował rozwiązanie polegające na wpisywaniu w koło ciągu figur. Na początku w koło wpisujemy kwadrat, a następnie w każdym kolejnym kroku wpisujemy w koło wielokąt, o liczbie boków dwa razy większej od liczby boków figury poprzedniej. Dla każdego takiego wielokąta da się skonstruować kwadrat o równym polu. Rozwijając tę procedurę Antyfon przyjął, że koło jest wielokątem o nieskończonej ilości boków. W związku z tym twierdził, że rozwiązał problem kwadratury koła. Dowód ten nie został przyjęty ze względu na wskazany przez Arystotelesa błąd, który polegał na utożsamieniu *bardzo wielkiej* ilości boków z nieskończoną ich ilością. Rozumienie nieskończoności Antyfona było zbyt ubogie — utożsamiał on nieskończoność z bardzo dużą liczbą, którą jednakże da się efektywnie skonstruować, czy przeliczyć. Nieskończoność, według niego, ma więc dokładnie tę samą naturę, co każda liczba skończona. Przykład ten pokazuje, że na gruncie matematyki brakowało wówczas odpowiedniego rozumienia pojęcia nieskończoności.

W matematyce pojawił się również problem niewymierności. Próba zdefiniowania liczb niewymiernych jako stosunków liczb naturalnych prowadzi do nieskończonego ciągu operacji matematycznych. Problem ten stał u podstaw pierwszego wielkiego kryzysu, jaki wyłonił się w matematyce. Brak rozwiniętego pojęcia nieskończoności sprawił więc, że nie powiódł się pitagorejski program sprowadzenia matematyki do arytmetyki liczb naturalnych. Warto wspomnieć, że program ten zostanie zrealizowany w pełni dopiero w drugiej połowie XIX w. dzięki badaniom K. Weierstrassa, G. Cantora i R. Dedekinda.

Matematyka grecka ujawniła również problemy związane z topologią wielkości ciągłych, które pojawiły się na gruncie geometrii. W odpowiedzi na te trudności Demokryt próbował zbudować matematykę skończoną[9]. Wielkości geometryczne (np. odcinki, pola) miały składać się ze skończonej ilości małych, niepodzielnych elementów o wielkościach różnych od zera. Takie ujęcie powodowało jednak powstawanie antynomii.

Pojęcie nieskończoności, które pojawiło się na gruncie matematyki, miało pewne cechy odmienne od jego odpowiednika stworzonego na grun-

---

[8]Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, OBI — Biblos, Kraków — Tarnów 2000, s. 68–69.

[9]Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, s. 79.

cie filozofii. Ujęcie to okazało się jednakże wysoce niewystarczające, aby rozwiązać zaistniałe sytuacje problemowe.

*

W związku z pojawieniem się sytuacji problemowych w filozofii i w matematyce w V w. p. n. e. na gruncie obu dziedzin wystąpił okres dyskusji związanych z pojęciem nieskończoności. Można powiedzieć, że doszło na tym tle do zbliżenia matematyki i filozofii, bowiem w dyskusjach przeplatały się wówczas ze sobą dwa rodzaje argumentacji. Jednym z powodów takiego zbliżenia obu dyscyplin było z pewnością to, że badacz był często i matematykiem i filozofem jednocześnie.

W wyniku omawianych dyskusji na gruncie filozofii powstały dwa rozwiązania, które zostały następnie przyjęte w matematyce. Pierwsze z nich związane jest z analizą aporii Zenona z Elei, przeprowadzoną przez Arystotelesa (384–322 r. p. n. e.). Problem, który stanął przed Stagirytą był bardzo skomplikowany, ponieważ z jednej strony trudno było obalić argumentację Zenona przy pomocy ówczesnego aparatu pojęciowego i dostępnej wiedzy, a z drugiej strony proponowane przez Eleatę rozwiązanie aporii implikowało paradoksalny obraz świata, w którym wszelka zmiana i ruch jest tylko złudą. Taki obraz stał w jawnej sprzeczności z doświadczeniem, więc należało go odrzucić.

W celu rozjaśnienia problemu aporii Arystoteles poczynił dwa ważne rozróżnienia. Pozwoliły one naświetlić nieco istotę różnych rodzajów nieskończoności, które występowały w argumentach Zenona pod jednym określeniem. Stagiryta wydzielił więc:

1. nieskończoność podziałów i nieskończoność krańców;
2. nieskończoność aktualną i potencjalną.

Pierwsze z rozróżnień pozwoliło rozwinąć badania nad ciągłością, czyli nieskończoną podzielnością, oraz nad nieskończonością w sensie nieograniczoności (np. przy powiększaniu zbioru). Dopiero dzięki temu rozróżnieniu można było w ogóle podjąć próbę zmierzenia się z argumentacją Zenona.

O wiele bardziej doniosłe stało się jednak drugie rozróżnienie. Arystoteles jako pierwszy wydzielił *explicite* te dwa możliwe aspekty nieskończoności. Historia sporów na gruncie matematyki nie pozwoliła zaakceptować mu nieskończoności aktualnej[10]. Opowiedział się więc zde-

[10] Jerzy Dadaczyński wskazuje, że były dwa argumenty natury matematycznej, dla których Arystoteles odrzucił istnienie nieskończoności aktualnej. Po pierwsze — przy-

cydowanie za nieskończonością potencjalną, argumentując, że taka koncepcja nie zmienia niczego w istniejącej wówczas matematyce[11]. Można zauważyć, że była to również próba pogodzenia finitystycznego obrazu świata z koncepcją nieskończoności. W tym ujęciu nieskończoność istnieje tylko potencjalnie, a wszystko w świecie pozostaje skończone. Jerzy Dadaczyński pisze celnie, że *można by scharakteryzować status nieskończoności potencjalnej w tradycji przedkantorowskiej jako rodzaj „dialektycznego pomostu" między tym, co absolutnie (aktualnie) nieskończone, a tym, co skończone*[12].

Stagiryta obrazuje czym jest nieskończoność potencjalna w odróżnieniu od aktualnej w następujący sposób: wzorcem nieskończoności potencjalnej jest ciąg liczb, który w każdym momencie składa się ze skończonej ilości elementów, ale nie istnieje żadne ograniczenie w jego rozszerzaniu. Potencjalną nieskończoność podziałów obrazuje natomiast odcinek, którego żaden skończony podział nie jest ostateczny. Podane przykłady stały się paradygmatami w myśleniu o nieskończoności, choć Arystoteles nigdy nie sformułował jej definicji[13].

Jak twierdzi Jerzy Dadaczyński, *rozróżnienie (na nieskończoność aktualną i potencjalną — P. P.) dokonane przez Arystotelesa zostało zaakceptowane przez tradycję zarówno matematyczną, jak i filozoficzną i było aktualne przez całe dzieje obydwu tych nauk*[14].

Drugie rozwiązanie, powstałe w V w. p. n. e., kluczowe z punktu widzenia problematyki nieskończoności, to wypowiedziane przez Anaksagorasa rozstrzygnięcie zagadnienia wielkości ciągłych: „w małym nie istnieje najmniejsze, ale zawsze jest jeszcze mniejsze"[15]. Jako wzór (paradygmat) ciągłości podawano podział odcinka na części.

---

jęcie nieskończoności aktualnej implikuje możliwość istnienia wszystkich elementów zbioru liczb naturalnych naraz. Daje to z kolei możliwość wprowadzenia pozaskończonych liczb porządkowych i w efekcie sformułowanie kontrprzykładu dla antycznego aksjomatu „całość jest większa od części". Po drugie — przyjęcie istnienia nieskończenie wielu niepodzielnych elementów odcinka groziło powstaniem paradoksów ujawnionych w aporii mnogościowej i aporii stadionu.

Por. J. Dadaczyński, *Matematyka w oczach filozofa. Jedenaście artykułów z filozofii matematyki*, OBI — Biblos, Kraków — Tarnów 2002, s. 28.

[11] Por. J. Dadaczyński, *Matematyka...*, ss. 28–29.

Trzeba też wspomnieć, że czynione były próby odmiennej interpretacji rozwiązania Arystotelesa (por. dz. cyt. s. 29).

[12] J. Dadaczyński, *Matematyka...*, s. 108.

[13] Por. J. Dadaczyński, *Matematyka...*, ss. 27–28.

[14] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, OBI — Biblos, Kraków — Tarnów 2000, s. 67.

[15] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, s. 79.

Próba podsumowania i analizy

Filozofia przygotowała na swoim gruncie pojęcie nieskończoności, wydobywając je na światło dzienne. Nadała mu interpretację i uściśliła zbiór potocznych intuicji. Jeżeli ten krok nie zostałby wykonany, niemożliwe byłoby nawet mówienie o czymś takim jak nieskończoność. Można by tylko używać określeń typu „niewysławialne”, „nienazwane”.

Od tego momentu pojęcie nieskończoności może zacząć już funkcjonować w różnych dziedzinach. Prześledziliśmy jego rozwój w filozofii i w matematyce.

Każda z nich, stosując swoje metody, doszła do pewnego punktu kryzysowego. Dopiero połączenie badań filozoficznych i matematycznych pozwoliło na wykształcenie stanowiska, które przyjął Arystoteles wobec nieskończoności oraz Anaksagoras wobec ciągłości. Rozwiązania te okazały się na tyle zadowalające, że przetrwały w niewiele zmienionej formie aż do drugiej połowy XIX wieku. Przez ten czas prace nad nieskończonością koncentrowały się głównie na terenie filozofii pozostającej pod silnymi wpływami teologii.

Dopiero dzięki pracom Cantora w II poł. XIX wieku udało się wytworzyć odpowiedni grunt dla owocnej współpracy filozofii i matematyki. Jak wykazał J. Dadaczyński[16], założenia filozoficzne spełniły istotną heurystyczną rolę w powstawaniu teorii mnogości i akceptacji nieskończoności aktualnej u Cantora. Autor ten wskazał również, że stwierdzenie przez Cantora nierównoliczności zbioru liczb naturalnych i liczb rzeczywistych pociąga poważne implikacje dla ontologii nieskończoności. Rozpoczął się więc i nadal trwa kolejny etap dialogu pomiędzy filozofią a matematyką.

Rzut oka na dalszą historię problemu

Bardzo ciekawy jest okres pomiędzy rozstrzygnięciem Arystotelesa, a XIX wiecznymi pracami Georga Cantora, które doprowadziły do akceptacji nieskończoności aktualnej na gruncie matematyki.

Okazuje się, że możemy znaleźć w tym okresie wiele przyczynków do rozwoju pojęcia nieskończoności. Na gruncie chrześcijaństwa nastąpiła akceptacja nieskończoności aktualnej, na co wpłynęła istniejąca tam koncepcja nieskończonego Boga. Na tym tle już u św. Augustyna doszło

[16]Por. *Heurystyka teorii mnogości Georga Cantora* w: J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, ss. 98–142.

do akceptacji nieskończoności aktualnej zbioru liczb naturalnych[17]. Równocześnie rozpoczął się proces absolutyzacji nieskończoności, co wynikło z przyjmowanej wówczas definicji nieskończoności jako nieograniczonej wielości.

Problemy te przejęło Średniowiecze, rozwinęło je i doprowadziło do absolutyzacji nieskończoności a następnie jej deifikacji. O ciągłym rozwoju problematyki świadczy fakt, że już w XII w. wskazywano na przynajmniej cztery sposoby istnienia nieskończoności. Ciekawy był wpływ Arystotelesa: wraz z odzyskaniem jego dzieł, otrzymano rozwiniętą koncepcję nieskończoności. Jednakże akceptacja samej tylko nieskończoności potencjalnej szybko okazała się być niewystarczająca na gruncie filozofii i teologii chrześcijańskiej. Z drugiej strony Filozof traktowany był już jako niepodważalny autorytet. Konflikt pomiędzy wymienionymi trendami objawił się z całą mocą w słynnym potępieniu paryskim z 1277 r.

Ciekawą propozycję rozumienia nieskończoności proponuje u początków Odrodzenia Mikołaj z Kuzy[18]. Twierdził on, że nieskończoność nie pozostaje w proporcji do niczego, jest więc jako taka nieznana. Kuzańczyk podkreślał istotową różnicę pomiędzy tym co skończone, a tym co nieskończone. Podobne podejście będzie prezentować Blaise Pascal[19]. Z ciekawszych koncepcji związanych z nieskończonością należy wymienić stanowisko G. W. Leibniza, który akceptował nieskończoną ilość przedmiotów, ale nie traktował tej wielości jak zbioru[20].

Trzeba zaznaczyć, że w niniejszym opracowaniu pominięto z konieczności bardzo wiele ciekawych i ważnych wątków.

W tym miejscu nasuwa się potrzeba pogłębienia badań nad okresem od Arystotelesa do Cantora. Myślę, że cenne rezultaty mogą dać

[17]Por. ciekawy artykuł J. Dadaczyńskiego: *Akceptacja nieskończoności aktualnej u św. Augustyna* w: J. Dadaczyński, *Matematyka...*, ss. 32–45.

[18]Por. E. Gilson, *Historia filozofii chrześcijańskiej w wiekach średnich*, PAX, Warszawa 1987, ss. 475–480.

[19]Wypowiedzi na temat nieskończoności znajdziemy w: B. Pascal, *Myśli (w układzie Jacquesa Chevaliera)*, PAX, Warszawa 2000.

We fragmencie 451 (ss. 196–197) znajdują się rozważania na temat natury nieskończoności antycypujące niektóre wnioski osiągnięte dzięki pracom Cantora. Jest to ciekawy przykład oparcia refleksji filozoficznej na pracy matematycznej. Mogło się to dokonać dzięki temu, że Pascal był zarówno wybitnym filozofem, jak i wybitnym matematykiem. W myśli Pascala można odnaleźć liczne punkty wspólne z koncepcją Kuzańczyka.

U Pascala znajdujemy również próbę wskazania paradygmatu w myśleniu o niepodzielnej nieskończoności Boga. Odnajdziemy ją we fragmencie 444 (s. 194).

[20]Por. J. Dadaczyński, *Matematyka...*, przypis nr 9, s. 102.

analizy przeprowadzone z uwzględnieniem historii filozofii, historii matematyki i historii rozwoju myśli teologicznej, a także w miarę potrzeb historii rozwoju innych dziedzin (np. fizyki). Tylko dzięki takiemu podejściu możliwe będzie ukazanie wzajemnych relacji interdyscyplinarnych, które zachodziły przy rozwoju pojęcia nieskończoności. Równocześnie umożliwiłoby to rozjaśnienie złożonej natury związków filozofii i nauki.

Następnie, mając opisaną pewną realizację procesu rozwoju, można by się pokusić o stworzenie pewnego modelu opisującego relacje nauka-filozofia, dającego z kolei przyczynek do wzbogacenia koncepcji rozwoju nauki. Dzisiejsze modele rozwoju nauki zdają się bowiem zapoznawać zupełnie specyficzne sprzężenia zwrotne, jakie zachodzą pomiędzy różnymi dyscyplinami nauk. Fakt koniecznego odwoływania się do innych dziedzin nauki musi więc rzutować na proces rozwoju[21].

W niniejszym opracowaniu starałem się zasygnalizować, że nie da się pominąć aspektu wzajemnych oddziaływań i tworzyć nawet tak abstrakcyjnej nauki jaką jest matematyka, bez uwzględnienia oddziaływań pochodzących z filozofii.

[21] Pomiędzy różnymi dyscyplinami występują bowiem charakterystyczne sprzężenia zwrotne. Jak wynika z analizy układów ze sprzężeniami, charakter układu zmienia się znacząco wraz z zaistnieniem w nim sprzężeń. Od charakteru tych oddziaływań zwrotnych zależeć będzie to, czy układ wykazywać będzie zwiększoną, czy zmniejszoną stabilność.