Semina □ Nr 2
Scientiarum 2003

Anna Brożek

Russell i Gödel – filozofowie, paradoksy i broda Platona

1. Raj matematyki

Bertrand Russell powiedział kiedyś, że dwudziestowieczny powrót do platonizmu jest jednym z najbardziej niezwykłych wydarzeń w dziejach nauki. Po całych epokach „obcinania brody Platonowi”[*] okazało się, że to właśnie ontologia twórcy Akademii, inspirowana poglądami jego poprzednika – Pitagorasa, stanowi atrakcyjną opcję dla filozofów matematyki.

Oto jak Russell charakteryzuje swoje młodzieńcze, pitagorejsko–platońskie stanowisko: *Przez jakiś czas czerpałem satysfakcję z doktryny wprowadzonej przez Platona* (...). *Zakładałem, że istnieje niezmienny, istniejący poza czasem świat idei i że jego niedoskonała kopia ujawnia się przed naszymi zmysłami. Matematyka zajmuje się światem idealnym, a w związku z tym osiąga ścisłość i doskonałość, której brakuje codziennemu światu*[1]. Zmiany w swych poglądach na filozofię matematyki określił Russell po latach jako „ucieczkę od Pitagorasa”. Z biegiem lat wyniki osiągane w matematyce i logice doprowadziły go do

---

[*] Pojęcie to wprowadził Quine pisząc: *jest to stara platońska zasada niebytu. Niebyt musi w pewnym sensie być, gdyż inaczej – czym jest to, czego nie ma? Tej powikłanej doktrynie można by nadać miano brody Platona. Historycznie rzecz biorąc, broda ta okazała się bardzo twarda, stępiając często ostrze brzytwy Ockhama* (W. O. V. Quine, *O tym co istnieje*, [w:] *Z punktu widzenia logiki*, PWN, Warszawa 1969, s. 10) (przyp. red.).

[1] Por. R. Monk, *Russell*, Amber, Warszawa 1998, s. 13.

zmian w poglądach metafizycznych i zmusiły do „przystrzyżenia platońskiej brody".

Dla porównania przedstawmy, jak deklaruje swe platońskie stanowisko inny matematyk i filozof matematyki, Kurt Gödel: *Pojęcia i klasy mogą być potraktowane jako obiekty rzeczywiste* (...). *Wydaje się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych. Filozofia matematyki powinna i musi być metafizyczna. Każda próba eliminacji filozofii prowadzi do zastoju, pesymizmu poznawczego i spowalnia jej postęp*[2]. Taki pogląd utrzymał Gödel do końca życia. Nie tylko zagorzale optował za platonizmem w dobie filozoficznego pozytywizmu i sceptycyzmu, ale i czynił to z rosnącym zaangażowaniem. Pozostał wierny platonizmowi niezależnie od otrzymywanych przez siebie, jakże często kontrowersyjnych, matematycznych wyników.

Pojawiają się pytania: co spowodowało, że mimo podobnego punktu wyjścia, drogi filozoficzne Gödla i Russella potoczyły się tak odmiennie? Czy uprawianie matematyki i osiągane w niej wyniki wpłynęły na ich światopogląd filozoficzny? Jeśli tak, to w jakim stopniu? A może to platonizm oznaczał dla każdego z nich coś innego?

Aby odpowiedzieć na te pytania przyjrzymy się krótko wizjom filozofii matematyki proponowanym przez Russella i Gödla. Rozpatrzymy etapy Russellowskiego „uciekania" od pitagoreizmu oraz motywy i efekty tej ucieczki. Następnie przyjrzymy się, w jaki sposób Gödlowi udało się, mimo wszystko, pozostać w matematycznym platońskim raju. Podsumowując, spróbujemy wychwycić, na czym polegały różnice między dwoma filozofami w przyjętej wizji filozofii matematyki i w celach, jakie sobie stawiali.

---

[2]Por. K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, [w:] *Collected works*, vol. II., Oxford University Press, Oxford 1990, ss. 119–153.

2. Lorda Russella zabawy z brzytwą

Bertranda Russella ogarnął w dzieciństwie ten sam zachwyt, który 2500 lat temu stał się udziałem Pitagorasa – zachwyt nad matematyką. Kilkuletniego Lorda zafascynował fakt wszechobecności zastosowań matematyki w fizycznym świecie. Russell uwierzył, że wszystko da się zmatematyzować. Wspominał: *Lubiłem rozmyślać o zastosowaniu matematyki do świata fizycznego i miałem nadzieję, że powstanie matematyka ludzkich zachowań, tak precyzyjna jak mechanika stosowana w inżynierii*[3]. Później jego zainteresowania wszechstronnymi zastosowaniami matematyki ustąpiły miejsca fascynacji zasadami, na których matematyka się opiera. Zaczął zapytywać o uzasadnienie wiedzy, którą uznawał za podstawę rzeczywistości. Dość oczywiste jest, że właśnie pitagorejsko–platońska doktryna zainteresowała Russella najbardziej. Świat, w którym żyjemy, jest matematyczny, bo w jakiś sposób „uczestniczy" w idealnym świecie matematycznym. Od kontemplacji matematyczności świata już tylko krok do platonizmu. Jak zauważa Russell, *dla Pitagorasa namiętna kontemplacja świata miała charakter intelektualny i prowadziła do wiedzy matematycznej*[4]. W matematyce pragnął Russell odnaleźć przede wszystkim pewność, a idealny świat bytów matematycznych był gwarantem tej pewności.

Taki był punkt wyjścia długiej i trudnej drogi filozoficznej młodego Bertranda. Jak zażartował, choć nie bez racji, C. D. Broad, Russell co kilka lat proponował nowy system filozoficzny. Pierwsza zmiana w światopoglądzie, a raczej „ontologiczna wycieczka"[5] nastąpiła, gdy jako osiemnastolatek Russell przybył do Cambridge i zaczął studiować ukochaną matematykę. Za sprawą idealisty McTaggarta spotkał się z panującym w Cambridge heglizmem, do którego też szybko przystał. W heglizmie Russell znalazł lekar-

[3] R. Monk, *op. cit.*, s. 8.
[4] R. Monk, *op. cit.*, s. 14.
[5] W autobiografii Russell pisze właśnie o „wycieczce" w stronę heglizmu.

stwo na pierwsze matematyczne paradoksy, które zachwiały jego wiarą w matematyczną pewność – były to paradoksy, jakie napotkał w geometriach nieeuklidesowych. Uważał wtedy, że to lekceważenie filozofii (w domyśle – dialektycznej) było źródłem postrzegania paradoksów matematycznych jako czegoś, na co nie ma miejsca w nauce. W filozofii Hegla wszystko (a w szczególności paradoksy) było dopuszczalne, bo cała nauka stanowiła wolny twór ducha. Russell napisał: *Przyjąłem pogląd Hegla, że żadna spośród nauk nie jest całkiem prawdziwa, jako że wszystkie zależą od pewnej abstrakcji, każda zaś abstrakcja prowadzi wcześniej czy później do sprzeczności*[6]. Tak zwana „logika" heglowska bazowała wręcz na sprzecznościach i przeciwieństwach, które miały w procesie kolejnych syntez znajdować swój kres w Absolucie. Przyjęty przez Rusella monizm i idealizm, pod pewnymi względami bliski pitagoreizmowi, okazał się znów na dłuższą metę nie do utrzymania.

Jak Russell pisze w autobiografii, w jego życiu było wiele zmian frontu, ale jedna prawdziwa rewolucja. Zdarzyła się ona około roku 1900, kiedy to Russell porzucił neoheglizm, stał się pluralistą i realistą: *Hegel i jego uczniowie mieli zwyczaj dowodzić, że czas, przestrzeń i materia to rzeczy niemożliwe... Przekonawszy się, że argumentacja Hegla była niesłuszna, przechyliłem się na stronę przeciwną – zacząłem wierzyć w rzeczywistość wszystkiego, czego dowodem nie można obalić, tzn. w punkty, chwile i cząsteczki oraz w platońskie uniwersalia*[7] . Tak więc świat Russella stał się nie tylko pluralistyczny, ale i obfity w różnego rodzaju byty. Russell został zwolennikiem poglądu, że wszystko, czego istnienia nie można obalić, jest rzeczywiste. Był przeświadczony, że istnieją zarówno przedmioty fizyczne, jak i jakości wtórne, oraz platońskie istoty i liczby.

[6] B. Russell, *Mój rozwój filozoficzny*, PWN, Warszawa 1971, s. 40.

[7] B. Russell, *op. cit.*, s. 7. Russell pisze, że zasadniczym krokiem było odrzucenie bradleyowskiej tzw. „koncepcji stosunków wewnętrznych" i zastąpienie jej pluralistyczną, russellowską koncepcją „stosunków zewnętrznych" (B. Russell, *op. cit.*, ss. 56–59).

Ewolucja, jaka dokonywała się w poglądach Russella po pluralistycznym przełomie, polegała na stopniowej eliminacji kolejnych kategorii bytów, czyli na konsekwentnym stosowaniu „brzytwy Ockhama" w odniesieniu do coraz szerszego zakresu uznawanych wcześniej istnień. Należało pozbyć się wszystkiego, na co zdrowy rozsądek nie mógł się zgodzić, a więc przede wszystkim sprzeczności i paradoksów.

Rownocześnie Russell nadal poszukiwał w matematyce pewności i dążył do jej ugruntowania jako wiedzy niezawodnej. Heglizm zawiódł, wobec czego nowym punktem wyjścia badań Russella stał się program logicyzmu, zaproponowany przez Peano. Russell pisał o nim bardzo entuzjastycznie: *Jedno z największych zwycięstw współczesnej matematyki polega na odkryciu, czym jest matematyka. Cała czysta matematyka* (...) *zbudowana jest z kombinacji prostych pojęć logicznych, a ich twierdzenia da się sprowadzić do ogólnych aksjomatów logiki przy użyciu sylogizmów lub reguł wynikania logicznego*[8]. W logice, ale nie dialektycznej – heglowskiej, a w nowej logice formalnej, widział więc Russell gwarancję dla pewności matematycznej. Gdyby udało się skonstruować idealny, zaksjomatyzowany system matematyczny, oparty o niekwestionowane prawa logiczne, okazałoby się, że matematyka jest nie tylko *wolna od sprzeczności, ale też bezwzględnie prawdziwa*[9].

Przełomowym odkryciem, które zainspirowało Russella do realizacji nowego programu, był zaproponowany przez Peano system aksjomatyczny, na którym można było oprzeć całą arytmetykę. Russell pragnął rozwinąć myśl włoskiego myśliciela, redefiniując jego aksjomaty poprzez zastąpienie liczb logicznym pojęciem klasy. Dzięki temu matematykę można byłoby uznać za dział logiki i uzasadnić jej pewność bez odwoływania się do dialektyki heglowskiej, czy kantowskich form naoczności. Istnienie klas, stanowiące podstawę przyjętego programu, było dla Russella oczywistością

[8] B. Russell, *op. cit.*, s. 30.
[9] B. Russell, *op. cit.*, s. 35.

zrozumiałą intuicyjnie. Dlatego szokiem było odkrycie, że za pojęciem klasy ukryte są sprzeczności.

Russell napotkał dwie takie sprzeczności. Pierwszą odnalazł w analizie nieskończonościowej Cantora. W pluralistycznym podejściu Russella największy istniejący zbiór to po prostu zbiór wszystkiego, co istnieje. Cantor podał jednak dowód, że nie istnieje największy zbiór. Zbiór liczb rzeczywistych nie jest bowiem równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, a ponadto każdy zbiór potęgowy (zbiór podzbiorów danego zbioru) jest liczniejszy od samego tego zbioru. Tym samym Cantor powołał do życia całe plejady nieskończoności – abstrakcyjnych, konstruowalnych klas. Sam Cantor nie mógł się nadziwić swoim odkryciom. Powiedział podobno: „widzę to, ale nie wierzę”. Russell też nie mógł początkowo przystać na odkrycie Cantora. Przyjął go z wielkimi oporami i przyznał w końcu, parafrazując Hamleta, że *jest mniej rzeczy na niebie i ziemi niż się filozofom śniło*[10].

Drugą sprzeczność związaną z pojęciem klasy Lord Bertrand odkrył sam, a zwiemy ją dziś „paradoksem Russella”; paradoksem, przez który, jak powiadał Peano, „matematyka zachwiała się w swoich podstawach”. Dla zobrazowania, na czym polega, rozpatrzmy wspomnianą w związku z dowodami Cantora klasę wszystkich klas. Jest to ciekawy obiekt, bo w przeciwieństwie do większości klas, jest swoim własnym elementem. (Zbiór ludzi, na przykład, nie jest człowiekiem, za to zbiór katalogów jest katalogiem.) A teraz zdefiniujmy pewną klasę jako zawierającą wszystkie klasy, które nie są swoimi elementami. Czy jest ona, czy nie jest swoim własnym elementem? Odpowiedź nie jest oczywista, a co gorsza prowadzi do antynomii. Jeśli jest swoim własnym elementem, to przestaje być klasą, która zawiera tylko klasy nie będące własnymi elementami. Jeśli nie jest własnym elementem, to nie zawiera wszystkich klas nie będących swoimi elementami i nie jest zdefiniowaną powyżej klasą.

---

[10] B. Russell, *op. cit.*, s. 44.

Zarówno paradoks liczb kardynalnych Cantora, jak i własny paradoks, doprowadziły Russella do zmian poglądów metafizycznych – uznał, że skoro pojęcie klasy wikła nas w paradoksy, to klasy nie są rzeczami „z tego świata” i nie mogą istnieć. Redukcja w pluralistycznym świecie nie nastąpiła z dnia na dzień, Russell powoli, stopniowo robił „czystki” w ontologii. „Principia Mathematica” – dzieło, nad którym pracował wraz z Alfredem Whiteheadem przez dziesięć lat – stanowiły próbę realizacji idei logicyzmu i rozwiązywały chwilowo paradoksy klas[11]. Ale redukcja matematyki do logiki miała swoje konsekwencje, które Monk nazywa *odrzuceniem ontologii i przyjęciem semantyki*[12]. Teraz Russell nie pytał już o to, co istnieje, a o to, o czym można sensownie mówić. Tak komentuje filozof swoją nową strategię: *Gdziekolwiek to możliwe byty wywnioskowane zastępować konstrukcjami logicznymi*[13]. Odwrót od Pitagorasa przejawił się najpierw w pozbyciu się bytów matematycznych, które odtąd uznał Russell za logiczne konstrukty.

Russell jest twórcą tzw. teorii deskrypcji, która stała się potężnym narzędziem redukcji metafizycznej. W swojej nowej, „semantycznej” filozofii uznał Russell, że nie istnieje nic, co oznaczane jest przez tzw. „symbol niekompletny”[14]. Symbol jest kompletny, jeśli istnieje jego znaczenie – istnieje przedmiot, który on denotuje. Symbol jest niekompletny, jeśli definiowany jest w zdaniu tylko kontekstowo i możemy się go „pozbyć”, dokonując rozkładu zdania na logiczne atomy, na przykład za pomocą teorii deskrypcji. Symbolem niekompletnym jest na przykład „złota góra” w zdaniu „Złota góra jest wysoka”. Za pomocą teorii deskrypcji ostatnie zdanie można przedstawić jako koniunkcję zdań: istnieje takie x, że: x jest złote i x jest wysokie. Łatwo zauważyć, twierdził Russell, że „złota góra” wcale nie musi niczego denotować i nie musi

---

[11] Rozwiązywała je teoria typów.

[12] B. Russell, *op. cit.*, s.48.

[13] Cyt. za: F. Copleston, *Historia filozofii*, t. VIII, Lublin 1989, s. 323.

[14] Lub: symbol niesamodzielny. Por. W. Marciszewski, *Logika formalna*, PWN, Warszawa 1987, s. 63.

istnieć żadne znaczenie tego wyrażenia. Russell uznał, że wszystko, co jest rzekomo denotowane przez symbol niekompletny, musi zniknąć z jego uniwersum.

Kolejne etapy bezlitosnego przerzedzenia ontologii to ogłoszenie, że klasy są „niekompletnymi symbolami”, a następnie, że są nimi także liczby, deskrypcje określone i sądy zdaniowe. Istnienie klasy jest w systemie logicznym odpowiednikiem prawdziwości (spełniania) funkcji zdaniowej. Sądy zdaniowe uznawane były początkowo przez Russella za rodzaj bytów abstrakcyjnych. Do odrzucenia tego poglądu zmusiła go jednak analiza zdań fałszywych. Lord Russell pisze: *W przeszłości uważałem, że istnieją sądy zdaniowe, ale dziś wydaje mi się to nie do przyjęcia.* (...) *Z tego, że dwie osoby myślą, że 2+2 jest pięć, nie może wynikać byt jakiegoś niepojętego cienia, który chwyta zdanie. Trudno mi przyjąć, że takie dziwadła krzątają się koło naszego świata, To, co nazywam sądem, w ogóle nie jest czymś realnym. Uznanie składa się z szeregu relacji między umysłem a składnikami zdania*[15]. Nie ma żadnego świata sądów (czy fregowskiego „trzeciego królestwa”) pomiędzy umysłem a światem materialnym. Sądy, tak jak deskrypcje określone, są tylko symbolami niekompletnymi.

Russell, długo wierny programowi redukcji matematyki do logiki, powątpiewał powoli także w podstawy tej drugiej. Pod wpływem Wittgensteina zgodził się w końcu, że przedmioty logiczne nie istnieją. Dalej, po lekturze *Traktatu logiczno–filozoficznego* przyznał, że logika i prawa myślenia dotyczą tylko symboli. Pozwalają, pisze Russell, stwierdzić, że „ten i tamten symbol znaczą to samo”. Zarówno zdania logiki, jak i matematyki to tautologie. Nie mówią nic ani o „tym”, ani o „tamtym” świecie, a ten drugi, skoro zbędny, nie istnieje. Oto jak smutno brzmią słowa komentujące ostateczny efekt Russellowskiej zabawy z Ockhamowską brzytwą:

Pitagoras, a po nim Platon znali teorię matematyki, która była czarująca i prosta. Uważali, że matematyka zajmuje się badaniem liczb i że każda liczba jest osobnym, odwiecznym przedmiotem, za-

[15] R. Monk, *op. cit.*, s. 62.

mieszkującym nadzmysłowe niebo. Gdy byłem młody, wierzyłem w coś podobnego, ale studia stopniowo rozwiały te złudzenia. Szukanie liczb w niebie jest płonnym zajęciem (...). *Wszystkie zdania logiki i matematyki są twierdzeniami na temat niewielkiej liczby słów. Ten wniosek należałoby przyjąć za epitafium dla Pitagorasa*[16].

3. Gödel, czyli odpowiedź platonika

Parę lat po tych antyplatońskich deklaracjach Russella ukazał się artykuł Kurta Gödla „O nierozstrzygalnych zdaniach «Principia Mathematica»...". Gödel próbował sprowokować Russella do dyskusji nad problemami filozofii matematyki i skłonić go do powrotu na stanowisko platońskie. Russell nie odważył się jednak podjąć wyzwania. Być może wieloletnie zmagania się z matematycznymi paradoksami pozwoliły mu już tylko zajmować się filozofią polityczną. Uznaje się, że twierdzenia limitacyjne Gödla są dowodem na niemożliwość przeprowadzenia programu logicyzmu, proponowanego przez Russella, a także „gwoździem do trumny" programu Hilberta[*].

Biorąc pod uwagę wcześniejsze rozważania, wydawać by się mogło, że twierdzenie o niezupełności Gödla może prowadzić tylko w jednym kierunku – do totalnej destrukcji platońskiego świata bytów matematycznych. Nawet tak podstawowy dział matematyki, jakim jest arytmetyka liczb naturalnych, ma swoje ograniczenia. Mimo to Gödel utrzymał poglądy, które porzucił Lord Russell – że świat matematyki jest realnym światem, a jej zdania opisują realną rzeczywistość. Wizja ontologii matematyki Kurta Gödla nie była tak dynamiczna, jak russellowska. Gödel zasadniczo utrzymywał swoje platońskie stanowisko. Ciekawa wydaje się zatem nie tyle

[16] R. Monk, *op. cit.*, s. 68.

[*] Programem Hilberta Gödel nazwał dążenia Hilberta do sformalizowania całej matematyki i znalezienia dowodów niesprzeczności dla powstałych w wyniku tego systemów aksjomatycznych. Zob. *Słownik uczonych*, Horyzont, Warszawa 2002, s. 281 (przyp. red.).

chronologiczna relacja z ewolucji jego poglądów, ile próba logicznej rekonstrukcji ich struktury.

Matematyka była uprawiana przez Gödla zawsze z punktu widzenia jego platońskiej metafizyki. Co więcej, był on przekonany, że tylko taka metafizyka jest gwarantem matematycznego postępu. Pogląd Gödla streszczają zdania: *Prawdy matematyczne dotyczą pojęć, które tworzą obiektywną rzeczywistość, której nie możemy tworzyć, a jedynie opisywać i postrzegać. Matematyka istnieje w świecie idealnym, a o jej bytach można formułować prawdziwe zdania*[17]. Świat obiektów matematycznych jest równie realny, jak świat bytów fizycznych. Podobnie, jak poznajemy przyrodę, poznajemy i „matematyczny raj". Zwróćmy uwagę, że „platonizm" oznacza tu tyle, co swego rodzaju „realizm". W idealistycznym systemie platońskim, rzeczywistość fizyczna w jakiś sposób jest odbiciem świata idei. Gödel podkreśla przede wszystkim to, że obiekty matematyczne istnieją niezależnie od świata fizycznego i umysłów ludzkich (choć nie zaprzecza, że pomiędzy światem fizycznym a matematycznym istnieją pewne, nawet ontyczne związki).

Gödel nie może się zgodzić ani z konstruktywizmem, ani z psychologizmem matematycznym. Matematyka nie jest naszym tworem, co najlepiej widać po problemach, jakie przed nami stawia.

Gdyby źródłem matematyki był ludzki umysł, to nie potrafilibyśmy powiedzieć, czego jeszcze nie wiemy. Tymczasem w matematyce istnieją nierozwiązywalne, a uświadomione problemy. Działalność matematyka podlega ograniczeniom, które nie powinny by się pojawić, gdyby był twórcą przedmiotu swych dociekań. Gdybyśmy byli konstruktorami matematyki, to nasze twory – matematyczne obiekty – nie mogłyby posiadać nieznanych nam cech. A tymczasem matematyka wciąż ujawnia nam nowe aspekty swojej rzeczywistości. Załóżmy na przykład, że liczby naturalne są naszym konstruktem. Aby dowieść pewnych twierdzeń o nich, musimy odwołać się do pojęcia „zbioru liczb naturalnych", a więc do

[17] K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny*, Biblos, Tarnów 2002, s. 45.

stworzenia nowego obiektu. Aby się dowiedzieć czegoś o własnościach obiektów, trzeba najpierw stworzyć inne obiekty.

Gödel twierdzi więc, że byty matematyczne muszą istnieć, aby matematykę w ogóle można było uprawiać. Tworzą pewną rzeczywistość, na którą nie mamy wpływu, a którą możemy jedynie niedoskonale opisywać i badać[18]. Gödel zdecydowanie odrzuca nie tylko konstruktywizm, ale i wszelkie próby redukcji świata bytów matematycznych. Oto jak Gödel krytykuje program logicyzmu przyjęty w „Principia...": *Jest to jeden z przykładów zmierzających do eliminowania założeń dotyczących istnienia obiektów poza danymi i zastępowania ich konstrukcjami opartymi na tych danych.* (...) *Klasy i pojęcia zredukowane w ten sposób nie będą miały wszystkich potrzebnych w matematyce własności. Wszystko to jest dowodem, że matematyka i logika oparte są na aksjomatach posiadających obiektywną treść i nie da się ich wyeliminować przez wyjaśnienie*[19]. Nie dziwi więc, że Gödel może porównać uprawianie matematyki i fizyki. W jednej i drugiej dziedzinie chodzi o poznawanie prawdy o obiektywnej rzeczywistości. W wypadku fizyki jest to prawda empiryczna. Prawda matematyczna wynika zaś z analizy pojęć, istniejących obiektywnie i niezależnie od podmiotu. Także w odniesieniu do matematycznego świata pojęć można mówić o fakcie, prawdzie, obiekcie, ale też i o błędzie, bo *nasza znajomość świata pojęć jest równie ograniczona i niepełna, co znajomość świata rzeczy*[20]. Gödel odróżnia przy tym matematykę „subiektywną" i „obiektywną". Matematyka subiektywna jest zbiorem zdań dowodliwych. Matematyka obiektywna zaś zbiorem zdań bezwzględnie prawdziwych i pełni rolę „idei regulatywnej" działań matematyka.

---

[18]Por. K. Gödel, *Collected works*, Oxford Univeristy Press, Oxford 1995, ss. 304–305 i K. Wójtowicz, *op. cit.*, s. 24.

[19]K. Gödel, *Russell's mathematical logic...*, s. 131.

[20]K. Gödel, *Some basic theorems on the fundations of mathematics and their implications*, [w:] *Collected works*, vol. III, Oxford University Press, Oxford 1995, s. 321.

Stanowisko Gödla jest realistyczne w odniesieniu do całości matematyki – włączając teorię mnogości. Jednak punktem wyjścia jest dla niego słaba wersja realizmu – wiara w istnienie liczb naturalnych. Metodę Gödla da się krótko ująć tak: problemy teorii liczb winny być rozstrzygnięte. Jeśli to konieczne dla ich rozwiązania, trzeba się odwołać do silniejszych założeń **egzystencjalnych** o istnieniu obiektów innych niż te, o których mowa w dowodzie. Zacytujmy samego Gödla: *w zamian znaleźliśmy nieskończenie wiele systemów, i jakikolwiek system byśmy nie wybrali z tej nieskończoności, zawsze jest jakiś silniejszy, tj. taki, którego aksjomaty są silniejsze*[21].Tak Gödel dochodzi do silnej wersji platonizmu matematycznego.

Przyjrzyjmy się teraz, jak uzasadnia Gödel tę możliwość nieskończonego rozszerzania uniwersum matematycznego: *Konstruowanie coraz wyższych szczebli jest konieczne do dowodzenia twierdzeń dotyczących nawet stosunkowo prostej struktury, a mianowicie twierdzeń arytmetycznych. Istnieją zadania arytmetyczne, które mogą być udowodnione tylko metodami analitycznymi, a nawet przez zastosowanie metod, w których odwołujemy się do bardzo dużych nieskończonych liczb kardynalnych i podobnych rzeczy*[22].

Rozpoczynamy od stwierdzenia najbardziej oczywistego faktu – istnienia liczb naturalnych. Podobnie, jak Russella, Gödla ujmowała peanowska koncepcja aksjomatyzacji arytmetyki i ugruntowania pozostałych dziedzin na tej podstawie. Arytmetyka Peano nie odwołuje się do pojęć wobec niej „zewnętrznych". (Jak pamiętamy, Russell pragnął ją ugruntować w oparciu o logikę, na co Gödel nie chciał się zgodzić). Ale, jak wykazuje Gödel, środki arytmetyki Peano nie są wystarczające dla rozstrzygnięcia wszystkich problemów teorioliczbowych, jakie występują w tej arytmetyzacji[23]. Ten problem, na mocy przekonania o obiektywnym istnieniu

[21]K. Gödel, *The Present Situation in Fundations of Mathematics*, [w:] *Collected Works*, vol. III, Oxford 1995, s. 47.

[22]K. Gödel, *The Present Situation...*, s. 48.

[23]Dowodzą tego twierdzenia limitacyjne Gödla.

obiektów matematycznych, musi być rozstrzygalny na gruncie samej matematyki – wystarczy tylko „odkryć" rozwiązanie. W ten sposób dochodzimy do konieczności sformułowania mocniejszych założeń, zbudowania mocniejszej teorii, czyli przyjęcia mocniejszej ontologii. W nowym matematycznym uniwersum sytuacja powtórzy się. Nadal będą istnieć problemy nierozstrzygalne. I znowu nierozstrzygalne zdania skonstruowane tutaj (w danym systemie) staną się rozstrzygalne, gdy zostaną zastosowane stosowne wyższe typy. Chcieliśmy znaleźć formalny system matematyki.

Przedmiotem matematyki jest obiektywnie istniejący świat pojęć, a uprawianie filozofii matematyki polega przede wszystkim na ich analizie. Co za tym idzie, matematyka bazuje na prawdach analitycznych, a nie syntetycznych. To różni ją od nauk empirycznych. Ale zdania matematyki, mimo że analityczne, nie są tautologiami w takim sensie, jak chciał tego za Wittgensteinem Russell. Gödel wyróżnia dwa znaczenia analityczności. Zgodnie z pierwszym, zdania analityczne to, owszem, po prostu tautologie nie posiadające żadnego znaczenia poza tym, że wyznaczają pewne struktury. W myśl drugiego, zdania analityczne odwołują się do realnie istniejącej treści pojęć. Może się więc zdarzyć, że zdania analityczne są nierozstrzygalne, jeśli nasza (subiektywna) matematyka nie „dotyka" w doskonałym stopniu świata matematyki obiektywnej. Matematykę i jej prawdy można zatem odkrywać niezależnie od tego, jak odkrywamy świat materialny i nieważne, czy można ją do niego stosować. Jeśli więc analiza pojęć matematycznych prowadzi do konieczności odwołania się do silniejszych założeń ontologicznych, to trzeba takie założenia poczynić. Matematyka jest rajem niezbadanym dotychczas i pewnie niemożliwym do zgłębienia nigdy.

4. Kilka wniosków

Spróbujmy podsumować wyniki naszych analiz i wskazać na podstawowe różnice w poglądach obu bohaterów. Jak wykazała nawet ta dość pobieżna analiza poglądów Russella i Gödla, u obu filozofów istnieje silny związek pomiędzy uprawianą przez nich matematyką a ich światopoglądem filozoficznym, a szczególnie przekonaniami ontologicznymi. Obaj byli matematykami. Ale obaj nie oddzielali swej naukowej działalności od swych przekonań. Ogniwem pośredniczącym pomiędzy wynikami uzyskiwanymi w nauce a światopoglądem jest filozoficzna refleksja nad dziedziną badań. Przyjrzyjmy się zatem, jak Russell i Gödel rozumieją filozofię matematyki.

Russell we „Wstępie do filozofii matematyki" pisze, że omawianych tam spraw *nie można objąć mianem filozofii, choć wchodziły one dawniej w jej zakres, ponieważ wiedza na ich temat była niewystarczająca. Np. nieskończoność i ciągłość były niegdyś przedmiotem filozofii, a dziś należą do matematyki*[24]. Russell uważa, że „przejście" do matematyki takich zagadnień, jak te wynikające np. z paradoksów ruchu, nastąpiło na skutek powiększenia się wiedzy na ich temat. A jednak matematyka nadal potrzebuje filozofii. Nie wszystkie zagadnienia matematyczne są rozwiązane, a zatem wciąż szuka ona swego uzasadnienia i ugruntowania. Russell *oczekiwał od filozofii matematyki, że zajmie się zagadnieniami z pogranicza wiedzy, co do których pewność nie została jeszcze osiągnięta*[25]. Filozofia matematyki w ujęciu Lorda Russella zajmuje się więc **uzasadnianiem swojego przedmiotu**, ugruntowaniem jej oraz powiązaniem matematyki z „pograniczem", czyli innymi dziedzinami myślenia.

Inaczej przedstawia się koncepcja filozofii matematyki Kurta Gödla. Filozofia matematyki to nie tyle ugruntowywanie jej podstaw i jej uzasadnianie, co analiza jej pojęć; *analiza pojęć jest centralnym zagadnieniem filozofii. Nauka tylko zestawia pojęcia i ich nie analizuje. (...) Nie chodzi tu o analizy lingwistyczne, a o analizowanie na głębokim poziomie*[26]. Prawdy matematyczne dotyczą pojęć, które tworzą obiektywną rzeczywistość, dlatego nie trzeba

[24] B. Russell, *Wstęp do filozofii matematyki*, Warszawa 1958, s. 5.
[25] B. Russell , *Wstęp...*, s. 8.
[26] Cyt. za: H. Wang, *A logical journey*, Massachusetts 1996, s. 237.

badać jej związków z tym, co „na zewnątrz" matematycznego świata. Wystarczy w filozofii matematyki poruszać się wewnątrz matematycznego uniwersum. Tego uniwersum *nie możemy tworzyć ani zmieniać, a jedynie postrzegać i opisywać*[27]. Filozofia matematyki Gödla nie zajmuje się więc jej związkami z russellowskim „pograniczem". Matematyka jest dziedziną samodzielną, a filozofia może służyć za narzędzie do analizowania jej wewnętrznych zagadnień. Matematyka nie potrzebuje ugruntowania i uzasadniania swych podstaw, bo tworzy tak obiektywną rzeczywistość, jak otaczający nas fizyczny świat.

To zestawienie każe się domyślać powodów, dla których Russell musiał porzucić platońską ontologię, a Gödel przy niej pozostał. U Gödla przekonania ontologiczne implikowały metodologię. Założenie o obiektywnym istnieniu matematycznych obiektów stanowiło uzasadnienie stosowanych metod. U Russella odwrotnie, to ze stosowanych metod wynika ontologia świata. Kolejne eliminacje matematycznych „podstaw" wynikły z przyjętej koncepcji ugruntowania matematyki na logice, redukcji logistycznej.

Tym, co chciał osiągnąć Russell w filozofii matematyki, była pewność. Dlatego sprzeczności i paradoksy zamykały przed nim kolejne obszary jego idealnego świata. Gödel nie liczył, że uda mu się uzyskać pewność w poznaniu matematycznej rzeczywistości. Dążył jedynie do coraz lepszego, choć wciąż niedoskonałego jej zgłębienia.

Dlatego matematyczne problemy otwierały przed nim nieznane ścieżki do nowych połaci matematycznej rzeczywistości. Russell wciąż rewidował swoją ontologię tak, by pozbyć się sprzeczności. Gödel, akceptując problemy jako dobrze postawione, szukał dla nich rozwiązania w samej matematyce, pozostając w granicach jej królestwa.

---

[27] Gödel, *Some basic theorems...*, s. 320.