Semina □ Nr 2
Scientiarum 2003

Tajemnica Cantora

Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów. Matematyka, kabała i poszukiwanie nieskończoności*, Nowe Horyzonty, Rebis, Poznań 2002, ss. 207.

„6 stycznia 1918 roku w uniwersyteckiej klinice dla psychicznie chorych w Halle zmarł na atak serca pewien schorowany, wychudzony mężczyzna" (s. 7). Mężczyzną tym był Georg Cantor, genialny matematyk, człowiek, na którego niełatwe życie miała ogromny wpływ specyfika rozważanych przez niego zagadnień.

Zwyczajowo Cantor jest uważany za twórcę teorii mnogości. Opinia ta wymaga jednak uściślenia; otóż *elementarna teoria zbiorów powstała na długo przed Cantorem. Zawsze, gdy dokonujemy klasyfikacji jakichś obiektów, posługujemy się elementarną teorią zbiorów* (s. 90). Cantor zaś nie tylko nadał tym intuicjom postać sformalizowaną, ale i uogólnił je na zbiory nieskończone. Rezultaty tego uogólnienia były paradoksalne. Po pierwsze, w obrębie samej teorii pojawiły się antynomie – wskazali na nie między innymi Burali–Forti i Russell; po drugie, własności zbiorów nieskończonych okazały się niezgodne ze zdrowym rozsądkiem. Ostatecznie antynomie udało się wyeliminować, choć wymagało to wysiłku wielu matematyków; z kolei konflikt teorii mnogości i zdrowego rozsądku rozstrzygnięto na niekorzyść tego drugiego, pokazując tym samym jego istotne ograniczenia. Nierozstrzygnięte pozostało jednak pewne zagadnienie, z którym związane były także zdrowotne problemy Cantora. Otóż nawiedzały go okresowo ataki depresji, a następowało to wówczas, gdy *rozmyślał nad zagadnieniem znanym dziś jako „hipoteza continuum". Zastanawiał się wtedy nad* *pewnym wyrażeniem matematycznym* (...) *Ponad sto lat od napisania go przez Cantora wciąż jest ono* (...) *jedną z najbardziej uporczywych tajemnic matematyki* (s. 13). Jednak trudno zrozumieć na ile istotne były dokonania twórcy teorii mnogości bez odniesienia do wcześniejszych prób poznania nieskończoności.

Myśliciele greccy jako pierwsi chcieli zrozumieć naturę tego, co nieskończone; pozostawiona przez nich spuścizna obejmuje, z jednej strony, paradoksy Zenona z Elei – zniewalająco trafne przykłady paradoksów, do jakich prowadzi posługiwanie się pojęciem nieskończoności, z drugiej zaś problem dychotomii pomiędzy liczbami a wielkościami ciągłymi, który zniszczył matematykę pitagorejską. Pojęcie nieskończoności zarazem fascynowało i przerażało myślicieli greckich, *przysporzyło im mnóstwa cierpień, wielu doprowadziło do obłędu i stało się powodem przynajmniej jednego morderstwa* (s. 15). Mimo tych trudności greccy filozofowie i matematycy dokonali wielu odkryć dotyczących nieskończoności. Z kolei, jak twierdzi Aczel, *przez dwa następne tysiąclecia wiedza o matematycznych właściwościach nieskończoności właściwie nie posunęła się do przodu. Jednak pojęcie to odrodziło się w średniowieczu w nowym kontekście: religijnym* (s. 25).

Inspiracją dla tego nowego – zasadniczo pozbawionego matematycznego charakteru – rozumienia nieskończoności były rozważania żydowskich myślicieli dotyczące natury Boga. Trafność uwag kabalistów była zadziwiająca; wskazali oni mianowicie, że*nieskończoność może istnieć jako nieskończony zbiór elementów dyskretnych lub przejawiających się w ciągłości* (...) *lecz na rozwinięcie matematycznego podejścia do opisu obu rodzajów nieskończoności trzeba było jeszcze poczekać* (s. 36). I faktycznie mimo tego, że zagadnienie nieskończoności było obecne w matematyce od XVI do XIX stulecia, matematyczną teorię nieskończoności skonstruował dopiero Cantor. Ale i jemu nie udało się wyjaśnić tajemnic nieskończoności; dlatego w XX wieku kontynuowano zainicjowane przez niego badania... jednak po pełną prezentację tej fascynującej historii odsyłam do książki Aczela.

Tajemnica alefów jest bez wątpienia książką niezwykłą, a stanowi o tym nie tylko zawarta w niej treść, ale i jej konstrukcja. W rozdziale wprowadzającym Aczel krótko opisuje Halle – miasto, w którym spędził najpłodniejsze lata swojego życia Georg Cantor – oraz w bardzo subtelny sposób wprowadza bohaterów dramatu: Cantora i *hipotezę continuum*. Następne rozdziały poświęcone są pojęciu nieskończoności w matematyce greckiej i kabale, spostrzeżeniom Galileusza i teoriom Bolzany oraz Berlińskiej szkole matematycznej; w tym kontekście na nowo pojawia się Cantor oraz jego epokowe dzieło. Po nim przedstawione zostają dokonania Goedla i Cohena, zarys aktualnego stanu teorii mnogości.

Muszę podkreślić, że wielkim atutem książki Aczela jest łatwo zauważalna naturalność związków pomiędzy następującymi po sobie rozdziałami; ponadto zaprezentowane w niej zagadnienia są opracowane bardzo starannie, z zachowaniem popularyzatorskiego celu a zarazem bez nadmiernych uproszczeń. Jednak i w tak znakomitej książce obecne są drobne pomyłki. Po pierwsze, zdziwiło mnie, że autor – kompetentny matematyk – przypisuje definicję, liczby podaną przez von Neumanna, Peanie (s. 92); z kolei mimo tego, że książka jest dobrze przetłumaczona, pojawiają się w niej drobne lapsusy takie, jak „algebraiści" (s. 66) zamiast – zgodnie z wymogami naszego języka – „algebraicy". Podobne, niewielkie pomyłki tłumacza nie mają jednak wpływu na jakość przekazu zawartości książki.

Nie będę za wszelką cenę zachęcał do lektury książki Aczela; niech sięgną po nią ci, którzy chcą ją przeczytać. Mimo to uważam, że takie – popularyzatorskie w przesłaniu ale napisane profesjonalnie – publikacje są niezwykle cenne; ukazują one bowiem nie tylko historię problemów, ale i historię borykających się z nimi ludzi, historię tak cennego przecież wysiłku rozumienia.

Robert Piechowicz