Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Wojciech Załuski

O dwóch aksjomatach teorii zbiorów w kontekście sporu o hipotezę continuum

Uwagi wstępne

Trwający od przeszło wieku spór o hipotezę continuum, w którym kluczową rolę odegrali Georg Cantor, Kurt Gödel i Paul Cohen, dotyka fundamentalnych zagadnień teorii mnogości. Jednym z nich jest pytanie o status i prawomocność niektórych jej aksjomatów. Spośród aksjomatów teorii mnogości tworzących tzw. system ZFC[1] szczególnie kontrowersyjny okazał się aksjomat wyboru: jego przyjęcie jest wprawdzie konieczne dla udowodnienia wielu twierdzeń matematycznych, jednak z uwagi na swój specyficzny[2] charakter został on odrzucony przez wielu matematyków, którzy podjęli próby jego „osłabienia” lub zastąpienia innymi aksjomatami. W niniejszej pracy chcemy zwrócić szczególną uwagę na jedną z wysuniętych propozycji — mianowicie na aksjomat determinacji, ilustrujący ciekawe związki między teorią gier a teorią mnogości.

Hipoteza continuum a aksjomat wyboru

Wprowadzenie aksjomatu wyboru do systemu aksjomatów teorii mnogości było ściśle związane z próbami udowodnienia hipotezy

---

[1] Od nazwisk jego twórców: Zermelo i Fraenkla; C oznacza dodany aksjomat wyboru (*axiom of choice*).

[2] Antycypując dalsze rozważania, wyjaśnijmy, iż ową „specyfiką” aksjomatu wyboru jest jego niekonstruktywność — pozostałe aksjomaty teorii zbiorów są konstruktywne.

continuum postawionej przez Cantora. Analiza aksjomatu wyboru może być zatem w pełni klarowna tylko wtedy, jeśli przeprowadzi się ją w kontekście sporu o hipotezę continuum.

Otóż, jak wykazała wspomniana analiza, najmniejszą pozaskończoną liczbą kardynalną[3] jest liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych (oznaczana jako $\aleph_0$, czyli alef zero[4]). Ponadto, dla każdego zbioru istnieje zawsze zbiór od niego liczniejszy, którym jest zbiór wszystkich jego podzbiorów, zwany zbiorem potęgowym. Liczba kardynalna odpowiadająca continuum wynosi $c = 2^{\aleph_0}$, jest zatem równa liczbie 2 podniesionej do potęgi będącej licznością nieskończonego zbioru liczb naturalnych[5]. Pytanie, które zadał Cantor, brzmi: czy istnieje inna pozaskończona liczba kardynalna — inny alef — który leży między alef zero i pozaskończoną liczbą kardynalną odpowiadającą continuum? **Odpowiedź negatywna na to pytanie jest właśnie hipotezą continuum**[6]. Problem dostrzeżony przez Cantora można, jak widzimy, wypo-

[3]Liczba kardynalna, moc zbioru i liczność są terminami równoznacznymi; dwa zbiory X i Y posiadają tę samą liczbę kardynalną, gdy są równoliczne, tj. gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru X na zbiór Y. Liczbą kardynalna zbioru pustego jest 0, liczbą kardynalną zbioru skończonego jest ilość elementów tego zbioru, czyli dana liczba naturalna — por. np. Kuratowski 1966.

[4]Alef ($\aleph$) jest pierwszą literą alfabetu hebrajskiego. Indeksowanymi alefami Cantor oznaczał kolejne pozaskończone liczby kardynalne (ta konwencja jest obecnie powszechnie przyjęta). O mistycznych korzeniach badań nad nieskończonością, zgłębianiu tajemnic Kabały jako inspiracji tych badań, magicznej aurze, jaką otoczona jest w tradycji hebrajskiej litera $\aleph$ bardzo interesująco pisze Aczel (Aczel 2002).

[5]W identyczny sposób możemy tworzyć coraz liczniejsze zbiory, np. aby skonstruować zbiór potęgowy liczb rzeczywistych, bierzemy pod uwagę wszystkie jego podzbiory — w rezultacie otrzymujemy zbiór d, którego liczność wynosi 2^c; tę procedurę można iterować i w efekcie dochodzimy do coraz większych liczb kardynalnych. Liczby te ciągną się w nieskończoność, nie istnieje więc największa liczba kardynalna (dla każdej liczby kardynalnej możemy utworzyć liczbę kardynalną od niej wyższą, będącą jej zbiorem potęgowym).

[6]Hipoteza continuum mówi zatem, że moc zbioru typu continuum wynosi alef jeden, czyli jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od mocy zbioru liczb naturalnych.

wiedzieć w prostym języku tak, iż na pierwszy rzut oka nic nie wskazuje na to, że sięga on samych podstaw matematyki i dotyka fundamentalnych zagadnień filozoficznych.

Jeśli hipoteza continuum byłaby zdaniem prawdziwym, to c można by oznaczyć jako $\aleph_1$, a więc jako pozaskończoną liczbę kardynalną występującą *bezpośrednio* po alef zero, który jest najniższym rzędem nieskończoności. Hipotezę continuum wyraża zatem równość: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, zaś — po uogólnieniu dokonanym przez Hausdorffa — równość: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (jest to tzw. uogólniona hipoteza continuum łącząca *każdy* alef z alefem, który bezpośrednio go poprzedza). Przejdźmy teraz do kwestii związanych z dowodliwością hipotezy continuum.

Otóż, warunkiem wstępnym, który musi być spełniony, by moc w ogóle podejmować próby udowodnienia tej hipotezy, jest znalezienie reguły pozwalającej porównywać pozaskończone liczby kardynalne[7] (z faktu, iż taka reguła istnieje, wynikałoby, iż każda z owych liczb przynależy do skali *alefów* $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,..., $\aleph_n$, którą Cantor oznaczył symbolem *taf*[8]). Zatem każda pozaskończona liczba kardynalna znajdzie swoje miejsce w skali *taf* pod warunkiem, iż istnieje sposób porównywania wszystkich możliwych par tychże liczb, tj. jeśli dla dowolnych dwóch pozaskończonych liczb kardynalnych jedna z nich jest równa lub większa od drugiej[9]. Zachodzenie tej relacji także dla pozaskończonych liczb kardynalnych gwarantuje **twierdzenie o dobrym porządku,** które głosi, że *każdy zbiór daje się dobrze uporządkować, a zbiór dobrze uporządkowany to taki, którego każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy*[10]. Gdyby twierdzenie to okazało się prawdziwe, to

[7]Por. Aczel 2002.

[8]Będącym ostatnią liczbą alfabetu hebrajskiego.

[9]W takiej relacji pozostają np. dwie dowolne liczby rzeczywiste.

[10]Aczel 2002, s.139. Zatem jeśli mamy zbiór złożony z dwóch elementów $\{1, 2\}$, to zbiór wszystkich jego podzbiorów ma cztery elementy: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$; każdy z niepustych podzbiorów ma element najmniejszy; są nimi odpowiednio $1, 2, 1$. Warto podkreślić, że zbiór liczb rzeczywistych nie jest dobrze uporządkowany: nie da się wskazać dla danej liczby rzeczywistej

pozaskończone liczby kardynalne tworzyłyby skalę zbiorów dobrze uporządkowanych; w takiej sytuacji aby dowieść hipotezy continuum, należałoby wykazać, że liczba kardynalna odpowiadająca continuum jest w skali *taf* drugą pozaskończoną liczbą kardynalną, czyli $\aleph_1$. Jak pisze Aczel: *widzimy zatem, że hipoteza continuum może być spełniona tylko wtedy, jeśli każda pozaskończona liczba kardynalna będzie jednym z alefów Cantora; a do udowodnienia tego koniecznego warunku trzeba było wykazać, że każdy zbiór można dobrze uporządkować*[11]. Dowód twierdzenia o dobrym porządku[12] został podany w roku 1904 przez Zermelo, który posłużył się w nim **aksjomatem wyboru**.

Aksjomat wyboru[13]:

Jeżeli R jest rodziną zbiorów, żaden z tych zbiorów nie jest pusty i żadne dwa zbiory należące do tej rodziny nie mają wspólnych elementów, to istnieje taki zbiór (zwany selektorem), który zawiera dokładnie po jednym elemencie z każdego zbioru należącego do rodziny R.

ani liczby bezpośrednio po niej następującej, ani jej poprzedzającej; ponadto między dwie dowolne, różne liczby można wstawić nieskończenie wiele innych liczb, a zbiór ograniczony z dołu może nie mieć elementu najmniejszego (np. przedział $(0;1)$). Nie jest zresztą dobrze uporządkowany również zbiór liczb całkowitych, gdyż nie ma on elementu najmniejszego.

[11] A.D Aczel, *Tajemnica alefów. Matematyka. Kabała i poszukiwanie nieskończoności*, Rebis, Poznań 2002, s.142.

[12] Z twierdzenia Zermelo wynika np., że także liczby rzeczywiste można dobrze uporządkować, a więc tak, iżby dla każdego elementu istniał element następny; nie ma jednak konkretnej metody wskazującej, jak to zrobić; inaczej jest w przypadku liczb całkowitych, które można dobrze uporządkować w następujący sposób: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ — każdy podzbiór tego ciągu ma element najmniejszy, a więc w przypadku każdej liczby wiadomo, jaka po niej nastąpi.

Kontrowersje wokół aksjomatu wyboru

Niebawem po sformułowaniu przez Zermelo dowodu twierdzenia o dobrym porządku rozpoczęła się burzliwa dyskusja na temat zasadności przyjęcia aksjomatu wyboru. Krytycy tego aksjomatu zwrócili uwagę na fakt, iż nie jest rzeczą oczywistą, że wybór elementów ze zbiorów należących do danej rodziny jest możliwy, jeśli zbiorów tych jest nieskończenie wiele; sam Zermelo nie zdołał np. podać żadnej reguły wskazującej, w jaki sposób można by przeprowadzić ów nieskończony ciąg wyborów. W istocie cały problem dotyczył tego, jak należy rozumieć wyrażenia, które mówią o istnieniu bytów matematycznych. Przeciwnicy włączania aksjomatu wyboru — mimo jego intuicyjnej oczywistości — do zestawu aksjomatów teorii mnogości reprezentowali nurt intuicjonistyczny w filozofii matematyki, w ramach którego istnienie bytów matematycznych utożsamia się z możliwością ich efektywnego skonstruowania. Nic więc dziwnego, że odrzucali oni aksjomat wyboru, który nie dostarcza żadnych algorytmów wyboru zbioru reprezentantów (czyli selektora), lecz tylko stwierdza jego istnienie (jest zatem niekonstruktywny).

Dodajmy, że matematycy sformułowali wiele twierdzeń równoważnych aksjomatowi wyboru; jednym z nich okazało się twierdzenie o dobrym uporządkowaniu, które, jak pisze Aczel, *zostało od razu uznane za podejrzane, gdyż uwierzenie w jego dowód było równoznaczne z przyjęciem, że istnieje możliwość wybierania elementu ze zbioru nieskończenie wiele razy*[14]; inne równoważne twierdzenia to lemat Kuratowskiego–Zorna[15], twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni topologicznych, lemat Teichmüllera–Tukeya, czy aksjomat multiplikatywny Russella[16]. Cechą wspólną wszystkich tych twierdzeń,

[14]Aczel 2002, s. 142.

[15]Mówi on, że jeśli A jest rodziną zbiorów o następującej własności: $(\bigcup\limits_{X \in B} X) \in A$ dla każdej monotonicznej rodziny $B \subset A$ i jeśli istnieje funkcja wyboru dla rodziny $P(A) - \{\emptyset\}$, to istnieje element maksymalny w A (sformułowanie to pochodzi z Kuratowski 1966).

[16]Por. Marciszewski (red.) 1988, s. 141.

która czyni je „podejrzaną" w oczach wielu matematyków, jest fakt, iż należą one do tzw. twierdzeń egzystencjalnych, tj. takich, które podają tylko warunki istnienia jakiegoś obiektu, nie wskazują natomiast metody jego konstrukcji.

Przeciwnicy dołączania aksjomatu wyboru do systemu Zermelo–Fraenkla zwrócili także uwagę na fakt, że aksjomat ten *prowadzi do paradoksalnych konsekwencji*. Stwierdza on mianowicie istnienie zbiorów i funkcji *niemierzalnych*, tj. gwarantuje, że istnieje (choć oczywiście nie podaje metody jego konstrukcji) zbiór na płaszczyźnie, którego pola nie da się określić oraz zbiór w przestrzeni trójwymiarowej, którego objętości również nie można określić. Na tezie o istnieniu takich zbiorów oparte jest słynne twierdzenie Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli, które przewiduje możliwość rozkładu kuli o danym promieniu na pewną skończoną liczbę części w taki sposób, że da się z nich następnie złożyć dwie kule o identycznym promieniu jak kula pierwotna; kulę rozbija się właśnie na zbiory niemierzalne (a nie na „zwykłe kawałki"), których istnienie gwarantuje aksjomat wyboru[17].

Zanim przejdziemy do omówienia aksjomatu determinacji, który miał zastąpić problematyczny aksjomat wyboru, przedstawimy dalszy ciąg zmagań matematyków z hipotezą continuum, tworzącą tło i niezbędny kontekst dla naszych rozważań poświęconych dwóm aksjomatom teorii zbiorów.

O dalszych losach hipotezy continuum

Dalsze badania wykazały, że w ramach aksjomatyki ZFC nie da się ani udowodnić ani obalić hipotezy continuum — jest zatem zdaniem nierozstrzygalnym[18], tj. takim, o którym — na podstawie przyjętego systemu aksjomatów — nie możemy powiedzieć, czy

[17] Warto również dodać, że zbiory *niemierzalne*sprawiają szczególne kłopoty np. przy rozwiązywaniu zadań z rachunku całkowego.

[18] Jest to zatem jeden z argumentów przeciw programowi Hilberta, zgodnie z którym w matematyce nie może być żadnego *ignorabimus*.

jest prawdziwe, czy fałszywe. Przedstawmy w zarysie przebieg tych badań.

Otóż najpierw Gödel dowiódł, że założenie o prawdziwości hipotezy continuum i aksjomatu wyboru nie jest sprzeczne z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości[19], nie może więc być obalone; okazało się zatem, że hipoteza continuum i aksjomat wyboru mogą być dołączone do systemu aksjomatów teorii mnogości. Oczywiście dowód Gödla nie rozstrzygał o prawdziwości hipotezy Cantora — jak pisze Aczel: *wynik Gödla był połową dowodu, że hipoteza continuum i aksjomat wyboru są niezależne od reszty matematyki*[20]; „drugą część" dowodu przeprowadził Cohen, który, posługując się metodą tzw. *forcingu*[21], wykazał, że aksjomat wyboru i hipoteza continuum nie wynikają z pozostałych aksjomatów, są więc od nich niezależne[22] (zatem ani dołączenie hipotezy continuum do systemu ZF, ani dołączenie jej negacji nie rodzi w nim sprzeczności)[23].

Widzimy zatem, że hipoteza continuum jest jednym ze zdań nierozstrzygalnych (których dotyczy słynne twierdzenie Gödla o niezupełności). Oczywiście twierdzenie Gödla nie wyklucza tego,

[19]W dzienniku Gödla, który po sformułowaniu twierdzenia o niezupełności zajął się problemem continuum, odnajdujemy taki zapis: *Kont. Hyp. im wesentlichen gefunden in der Nacht zum 14 und 15 Juni 1937* — por. Aczel 2002 oraz Gödel 1947.

[20]Aczel 2002, s. 167.

[21]Oto jak (bardzo szkicowo) charakteryzuje te metodę Aczel (2000, s. 176): *Forcing to wymuszanie na zbiorze postulatów przyjmowania jednej z dwóch wartości; następnie stopniowo przechodzi się z rodzinami zbiorów i prawami logicznymi, które ich dotyczą, do coraz większych zbiorów, w których prawa te nadal obowiązują. Manipulowanie postulatami w ramach większego systemu logicznego pozwala dowieść, że hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości.*

[22]Ujmując rzecz ściślej: aksjomat wyboru jest niezależny od aksjomatów teorii mnogości, zaś hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów teoriomnogościowych także z włączonym aksjomatem wyboru.

[23]Warto dodać, że już Gödel — kilkanaście lat po udowodnieniu niesprzeczności hipotezy continuum — wyraził przypuszczenie, że jest ona także niezależna; przypuszczenie to, jak wiemy, zostało potwierdzone, przez dowód Cohena — por. Gödel 1947.

że w ramach bogatszego systemu aksjomatów da się dowieść, że bądź hipoteza continuum bądź jej negacja jest prawdziwa. Warto zauważyć, że sam Gödel, jak wiadomo zwolennik platońskiego realizmu, był przekonany o sensowności poszukiwań aksjomatów, które pozwoliłyby pełniej opisać, jego zdaniem istniejący obiektywnie, świat struktur matematycznych i tym samym rozwiązać różne „otwarte" problemy matematyczne, m.in. właśnie problem hipotezy continuum. W swojej przełomowej pracy[24] z 1938 roku Gödel wyraził pogląd, że naturalnym uzupełnieniem aksjomatów teorii mnogości może być aksjomat konstruowalności[25], który w połączeniu z systemem ZF pozwala dowieść aksjomatu wyboru i uogólnionej hipotezy continuum. Jak pisze jednak Cohen, *jest mało nadziei na to, że aksjomat taki zostanie zaakceptowany jako intuicyjnie oczywisty; bardziej prawdopodobne wydaje się raczej to, że jako aksjomat zostanie zaakceptowana jego negacja*[26]; dodać zresztą należy, że już w artykule z 1947[27] roku Gödel zmienił zdanie, twierdząc, że aksjomat konstruowalności nie doprecyzowuje pojęcia zbioru nieskończonego w odpowiedni sposób.

Podsumowując tę krótką dygresję na temat hipotezy continuum, trzeba podkreślić, że — w odróżnieniu od Cantora — zarówno Cohen, jak i Gödel (mimo pewnych wahań związanych z przejściową akceptacją aksjomatu konstruowalności) nie wierzyli w jej prawdziwość. Cohen uważał na przykład, że continuum, skonstruowane przy pomocy aksjomatu zbioru potęgowego, jest nieosiągalne drogą konstrukcji opartej na aksjomacie zastępowania[28], jest zatem zbiorem na tyle bogatym, że należy go traktować jako zbiór

[24]Gödel 1938.

[25]Głosi on, że każdy zbiór jest konstruowalny (czyli, że $V = L$, gdzie V oznacza uniwersum wszystkich zbiorów, zaś L — uniwersum zbiorów konstruowalnych).

[26]Cohen 1971, (w przekładzie polskim), s. 131.

[27]Gödel 1947.

[28]Oto jego treść: jeżeli A jest zbiorem i każdemu elementowi zbioru A przyporządkowano jakiś element (należący do A lub nie), to wszystkie przyporządkowane elementy też tworzą zbiór — por. Kuratowski 1966.

większy niż $\aleph_1$, $\aleph_n$, $\aleph_\omega$ itd.[29]; natomiast Gödel wskazywał na nieintuicyjny charakter niektórych konsekwencji tej hipotezy np. na fakt, iż wynika z niej istnienie „małych" zbiorów mocy continuum oraz podkreślał, iż żadne wiarygodne zdanie nie implikuje tej hipotezy[30]. Jednak, jak zaznacza Wójtowicz, *argumenty te nie są powszechnie uważane za rozstrzygające dyskusję*[31].

Aksjomat determinacji zamiast aksjomatu wyboru?

Problemy, jakie niesie z sobą przyjęcie aksjomatu wyboru, skłoniły wielu matematyków do poszukiwania alternatywnych aksjomatów, które mogłyby zostać dołączone do systemu Zermelo-Fraenkla. Jedną z najbardziej interesujących propozycji jest tzw. aksjomat determinacji[32], oparty na pewnej grze wymyolonej przez Stefana Banacha. Oto zasady tej gry[33]: dwóch graczy wybiera na przemian jedną z cyfr od 0 do 9, tworząc w ten sposób pewien ich nieskończony ciąg np. $8, 5, 3, 4, \ldots$, któremu odpowiada liczba z przedziału $[0, 1]$ o rozwinięciu dziesiętnym danym przez ów ciąg, np. $0,8534\ldots$. Przed rozpoczęciem gry *gracz I* wybiera pewien podzbiór A odcinka $[0, 1]$ i usiłuje doprowadzić do tego, aby wygenerowana wspólnie z *graczem II* liczba znalazła się w tym zbiorze; natomiast *gracz II* dąży do tego, aby wyprodukowana liczba nie znalazła się w tym zbiorze A. Gra Banacha — oznaczana dalej jako Γ_A — stanowi przykład gry nieskończonej w postaci ekstensywnej[34]. Czy którykolwiek z graczy ma w tej grze stra-

[29] Cohen dodawał jednak, że takie rozważania są „czystą spekulacją" — por. Cohen 1971.

[30] Przegląd argumentów za i przeciw prawdziwości hipotezy continuum można znaleźć w Wójtowicz 2002, s. 128–137.

[31] Wójtowicz 2002, s. 125.

[32] O tym aksjomacie, sformułowanym notabene przez polskich matematyków Mycielskiego i Świerczkowskiego, napisano m. in. *[it] is the most interesting alternative to the axiom of choice* — Jech 1977, s. 365.

[33] Por. Malawski, Wieczorek, Sosnowska 1997, s.183 oraz Jech 1977, s. 369.

[34] Postać ekstensywna gry to po prostu rozbudowany graf lub rozgałęzione drzewo ilustrujące wszystkie możliwe przebiegi danej gry wieloetapowej. Takie

tegię wygrywającą? Odpowiedź na to pytanie zależy od rodzaju zbioru A: jeśli zbiór A będzie np. zbiorem liczb mających cyfrę 2 na drugim miejscu po przecinku, to zwycięzcą będzie oczywiście *gracz II*[35], jeśli zaś będzie to np. zbiór liczb mających cyfrę 8 na siódmym miejscu po przecinku, to zwycięży *gracz I*. **Gra Γ_A jest zdeterminowana, jeśli jeden z graczy ma w niej strategię wygrywającą**[36].

Aksjomat determinacji[37]**:**

dla każdego zbioru A, gra Γ_A jest zdeterminowana.

Aksjomat determinacji jest bardzo intuicyjny; nie daje się jednak pogodzić z równie intuicyjnym aksjomatem wyboru, gdyż, jak pisze Jech, *posługując się dobrym porządkiem zbioru wszystkich ciągów liczb całkowitych, można skonstruować grę, która nie jest*

---

drzewo lub graf konstruuje się przez wskazanie punktu początkowego gry, określenie możliwych posunięć graczy w kolejności: *gracz*1 – *gracz*2 – ewentualnie *gracz n* – znów *gracz*1 (każdemu wierzchołkowi oprócz wierzchołka końcowego przypisany jest dokładnie jeden gracz) aż do osiągnięcia jednego z punktów końcowych, przy których znajduje się opis wygranych poszczególnych graczy; por. np. Berninghaus, Erhhart, Güth 2002, ss. 89–113.

[35] W przypadającym na niego ruchu wybierze np. cyfrę 9.

[36] Strategia jest wyczerpującym opisem postępowania gracza w każdej sytuacji, która może zaistnieć w trakcie gry. Strategią wygrywającą natomiast jest taka strategia, która prowadzi do wygranej niezależnie od tego, jakie ruchy wykona przeciwnik. Warto podkreślić, że teoria gier nie gwarantuje, że *dla każdej* gry istnieje strategia wygrywająca (teza o istnieniu takiej strategii dla każdej gry jest w istocie teoriogrowym odpowiednikiem prawa wyłączonego środka); Zermelo wprawdzie dowiódł, że wszystkie gry dwuosobowe o sumie zerowej o skończonej głębokości, tj. w których każdy z graczy ma skończoną liczbę strategii, są zdeterminowane; pozostają jednak inne typy gier, np. gry nieskończone, dla których istnienie strategii wygrywającej można co najwyżej postulować, wprowadzając aksjomat determinacji; por. np. Fudenberg, Tirole 1993, s. 13.

zdeterminowana[38]. Należy zatem dokonać wyboru między oboma aksjomatami, gdyż ich równoczesne przyjęcie rodzi sprzeczność.

***

Omówiliśmy wyżej szereg zarzutów, jakie wysuwa się zwykle przeciw aksjomatowi wyboru; pojawia się jednak pytanie, czy aksjomat ten można całkowicie wyeliminować z teorii zbiorów. Większość matematyków uważa, że nie jest to możliwe, gdyż pełni on zbyt doniosłą rolę m.in. w logice matematycznej, czy takich działach matematyki, jak algebra abstrakcyjna, analiza funkcjonalna, teoria miary[39] (jest to tzw. *argument zewnętrzny* za aksjomatem wyboru, tj. wskazujący na to, iż jest on konieczny dla nauki; argumentem wewnętrznym jest wspomniana już wcześniej intuicyjna oczywistość tego aksjomatu[40]). Można jednak osłabić aksjomat wyboru, ograniczając możliwość wyboru tylko do niektórych sytuacji[41].

„Osłabiony" aksjomat wyboru powstaje np. wtedy, gdy rodziny zbiorów zostają zawężone do takich, które są przeliczalne, a więc równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych; innym przykładem jest aksjomat zależnego wyboru (*axiom of dependent choice*), który mówi, że jeśli pewnym elementom x jakiegoś zbioru X przyporządkujemy niepuste zbiory $F(x)$ i również każdemu elementowi y każdego zbioru postaci $F(x)$ przyporządkujemy pewien niepusty zbiór $F(y)$, to wówczas można znaleźć taki ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, że x_1 należy do zbioru $F(x_0)$, x_2 należy do $F(x_1)$, itd. Nazwa aksjomatu pochodzi stąd, że wybór każdego elementu x_i tego ciągu zależy od wyboru poprzedniego elementu x_{i-1}.

[38] *Using a well–ordering of the set of all sequences of integers, one can construct a game that is not determined.* — Jech 1977, s. 365.

[39] Aksjomat wyboru jest używany np. w definicji ciągłości funkcji Cauchy'ego, w dowodzie twierdzenia Hahna–Banacha; więcej przykładów jego zastosowania można znaleźć w Murawski 2001.

[40] Rozróżnienie to pochodzi od Maddy 1988.

[41] Malawski, Wieczorek, Sosnowska 1997, s. 189.

Niekontrowersyjne aksjomaty teorii mnogości[42] w połączeniu z osłabionym aksjomatem wyboru albo aksjomatem determinacji tworzą układ pozwalający udowodnić wiele znanych twierdzeń matematycznych[43] i wyeliminować niepożądane konsekwencje pierwotnego aksjomatu wyboru (taka konfiguracja aksjomatów nie pozwala już np. na przeprowadzenie paradoksalnego rozkładu kuli, pozostają zatem wyłącznie zbiory i funkcje mierzalne). Jak pisze jednak A. Wieczorek: *mimo iż takim zmodyfikowanym układem aksjomatów można udowodnić prawie wszystkie znane twierdzenia matematyczne, które znajdują zastosowanie w codziennej praktyce (...) siła naszego przyzwyczajenia i tradycji jest jednak wielka i chyba nadal, mimo zalet zmodyfikowanej aksjomatyki, będziemy posługiwać się starym wysłużonym zestawem aksjomatów Zermelo–Fraenkla*[44]. Opinię Wieczorka należy jednak skonfrontować z komentarzem Jecha, który zaznacza, że mimo zalet, jakie posiada aksjomat determinacji, zwłaszcza w kontekście deskryptywnej teorii zbiorów, jest on z pewnych względów problematyczny, np. implikuje on osobliwą prawidłowość — mianowicie, iż $\aleph_1$ i $\aleph_2$ to mierzalne liczby kardynalne, $\aleph_3$, $\aleph_4$ nie są mierzalne, zaś $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$ znów są mierzalne; co gorsza, nie jest rzeczą pewną, że wszystkie jego konsekwencje są niesprzeczne.

---

[42] Np. aksjomat ekstensjonalności sumy, zastępowania, nieskończoności itd. Słowo „niekontrowersyjne" być może nie jest w pełni trafne, gdyż niektóre z nich np. aksjomat wyróżniania również wzbudzają rożnego rodzaju wątpliwości; jednak żaden z tych aksjomatów nie był nigdy kwestionowany z równie poważnych powodów jak aksjomat wyboru.

[43] Np. Jech pisze: *The axiom of determinacy is particularly appreciated by the descriptive set theorists; it implies the countable axiom of choice, and so the basic theorems on real numbers are not affected by the absence of the axiom of choice (...) Moreover, the axiom of determinacy settles various problems on projective sets, like uniformization and reduction theorems* — Jech 1977, s. 366.

[44] Malawski. Wieczorek, Sosnowska 1997, s. 189.

Np. nie wiadomo, czy niesprzeczne jest twierdzenie: *każdy podzbiór* $\aleph_1$ *albo zawiera zamknięty nieograniczony zbiór albo jest z nim rozłączny*[45]. Jech podkreśla, że to zdanie implikuje tezę, że $\aleph_1$ jest mierzalną liczbą kardynalną (*measurable cardinal*); teza ta jest wprawdzie niesprzeczna, Jech dodaje jednak, że implikacje zdania „każdy podzbiór $\aleph_1$ albo zawiera zamknięty nieograniczony zbiór albo jest z nim rozłączny" zdają się być dużo silniejsze (*appear to be much stronger*), gdyż implikują istnienie modeli teoriomnogościowych z wieloma mierzalnymi liczbami kardynalnymi.

Ważną konkluzją rozważań Jecha jest konstatacja, że udowodnienie niesprzeczności wspomnianego twierdzenia lub twierdzeń podobnych byłoby pierwszym krokiem w kierunku wykazania niesprzeczności samego aksjomatu determinacji.

Uwagi końcowe

Współczesna teoria mnogości jest najczęściej interpretowana w duchu filozoficznego realizmu[46]. Inaczej mówiąc: fakt, iż w wielu przypadkach nie można zdefiniować funkcji pozwalającej dokonać wyboru reprezentantów z danej rodziny zbiorów, jest uznawany przez większość matematyków za nieistotny dla kwestii istnienia selektora — zbiór ów uchodzi za *istniejący* niezależnie od tego, czy da się go skonstruować. Przyjęcie realistycznego stanowiska w kwestii istnienia obiektów matematycznych, które z wielu względów wydaje się bardziej przekonujące niż stanowisko intuicjonistyczne[47], znacznie osłabia pozycję krytyków aksjomatu wyboru (już zachwianą przez fakt, iż aksjomat wyboru, jak wspominaliśmy, jest konieczny dla udowodnienia wielu twierdzeń); pamiętając jednak o wspomnianych wyżej „paradoksalnych" konsekwencjach tego aksjomatu, za przesadną należy uznać opinię, iż *gdy abstrahować od*

[45] *Every subset of* $\aleph_1$ *either contains or is disjoint from a closed unbounded set* (Jech 1977, s. 366).

[46] Por. Maddy 1988.

[47] Interesującą argumentację na rzecz realizmu prezentuje np. Roger Penrose w swej słynnej książce *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, PWN, Warszawa 2000.

rozróżnień dotyczących opozycji między istnieniem i konstrukcją, aksjomat wyboru staje się jednym z najmniej problematycznych aksjomatów teorii mnogości[48]. Niemniej jednak wypada zgodzić się z tezą, że aksjomat determinacji nie jest autentyczną alternatywą dla aksjomatu wyboru w ramach systemu Zermelo-Fraenkla.

[48]D. A. Martin, *Sets versus classes*, cytat za: Maddy 1988, s. 172 (w przekładzie polskim).

Literatura cytowana:

S. K. Berninghaus, K.–M. Erhhart, W. Güth (2002), *Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie*, Springer, Berlin.

P. J Cohen (1971), *Comments on the foundations of set theory*, w: *Axiomatic Set Theory*, D. Scott (red.), „Proceedings of Symposia in pure mathematics", t. 13, cz. 1, Providence, Rhode Island 1971, ss. 9–16. Przekład polski: *O podstawach teorii mnogości*, w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa.

D. Fudenberg, J. Tirole (1993), *Game Theory*, MIT Press, Cambridge Massachusetts.

K. Gödel (1938), *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, „Annals of Mathematical Studies", vol. 3, Princeton University Press, Princeton.

K. Gödel (1947), *What is Cantor's problem continuum?*, „The American Mathematical Monthly" 54, ss. 515–525. Przekład polski: *Co to jest Cantora problem continuum?* w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa, ss. 103–123.

T. J. Jech (1977), *About the Axiom of Choice*, w: *Handbook of Mathematical Logic* (red. J. Barwise), North Holland Publishing Company, ss. 346–369.

K. Kuratowski (1966), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa.

P. Maddy (1988), *Believing the axioms I, II*, „Journal of Symbolic Logic" 53, ss. 481–511 oraz 736–764. Przekład polski:

Wierząc w aksjomaty, w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa, ss. 171–173.

M. Malawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska (1997), *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, PWN, Warszawa.

W. Marciszewski (red.) (1988), *Mała encyklopedia logiki*, Ossolineum, Wrocław.

R. Murawski (2001), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa.

K. Wójtowicz (2002), *Platonizm matematyczny. Studium z filozofii matematyki Kurta Gödla*, Biblos — Tarnów, OBI — Kraków.