Semina □ Scientiarum Nr 4 2005

Ryszard Philipp

Twierdzenia Gödla a niemechaniczność umysłu (cz. II)

Formalną krytykę argumentacji za antymechanicyzmem, jakiego zwolennkiem jest na przykład Lucas, podaje Krajewski[1]. Przeprowadzenie tego rozumowania wymaga zgody Antymechanicysty na przyjęcie kilku warunków, które są jednak „życzliwe". Argumentacja prowadzona jest w konwencji sporu Antymechanicysty z Mechanicystą. Rozumowanie, nie ma jednak charakteru gry i nie polega, jak można by przypuszczać, na naiwności Antymechanicysty, który skłonny jest zgodzić się na podchwytliwe założenia, podsuwane mu przez Mechanicystę, lecz pokazuje ograniczenia globalnej argumentacji[2] powołującej się na twierdzenia Gödla, przy rzeczywiście słabych wymaganiach w stosunku do procedury „wygödlowania"[3]. Gdyby opisana przez Krajewskiego konstrukcja mogła zostać zrealizowana, to i tak trudno byłoby zgodzić się, że jest to ostateczne pogrążenie Mechanicysty. Skoro jednak tak liberalne warunki nie mogą być zrealizowane, to świadczy to o tym, że wykorzystanie twierdzenia Gödla do uzasadnienia wyższości umysłu nad maszyną w sposób globalny, jest niemożliwe. Warunki proponowane przez Krajewskiego można sformułować następująco[4]:

---

[1] S. Krajewski, op. cit., ss. 141 nn. Argumentacja ta jest zaczerpnięta z: G. Lee Bowie, „Lucas' number is finally up", *Journal of philosophical Logic* 11 (1982), 279–285, por. również: S. Krajewski, „Twierdzenie Gödla a filozofia", *Studia Filozoficzne* Nr 6–7 (1988), 157–177.

[2] Chodzi o podanie ogólnej metody dla wszystkich maszyn Turinga.

[3] Oznacza ona bazujące na twierdzeniu Gödla wykazanie wyższości antymechanicysty nad daną maszyną Turinga (przedłożenie odpowiedniego zdania gödlowskiego.

[4] Por. S. Krajewski, op. cit., ss. 141 nn.

1. Maszyna, która ewentualnie ma być modelem umysłu, musi być maszyną Turinga.

2. Antymechanicysta musi „reagować” przynajmniej na każdą niesprzeczną maszynę Turinga, reakcja na maszyny sprzeczne może być dowolna.

3. Reakcja Antymechanicysty ma polegać na wskazaniu zdania niedowodliwego dla każdej maszyny niesprzecznej.

Ponadto zakładamy, że procedura konstrukcji zdania niedowodliwego jest procedurą efektywną, tzn. jest wyrażona przez funkcję rekurencyjną $F(k)$ (częściową lub totalną).

Założenie pierwsze, aczkolwiek arbitralne, jest jednak dobrze uzasadnione. Gdyby Mechanicysta twierdził, że umysł jest maszyną, lecz maszyna ta ma możliwości większe, niż maszyna Turinga, nie twierdziłby w zasadzie nic więcej, jak tylko to, że umysł jest obiektem fizykalnego świata, a w szczególności o własnościach tak rozumianego umysłu nie powiedziałby nic więcej niż to, co i tak mówi współczesna nauka.

Założenie drugie jest liberalne, intuicyjnie wydaje się nawet zbyt słabe. Jednak jego wzmocnienie prowadzi do istotnych problemów formalnych. Nie jest bowiem możliwe efektywne rozstrzygnięcie tego, czy dowolna maszyna jest niesprzeczna, ponieważ zbiór indeksów niesprzecznych maszyn Turinga nie jest rekurencyjny. Nie istnieje maszyna Turinga, która potrafiłaby wskazać wszystkie niesprzeczne maszyny na liście wszystkich maszyn Turinga. Istotnie. Załóżmy bowiem, dla dowodu nie wprost, że zbiór indeksów wszystkich niesprzecznych maszyn Turinga C, jest rekurencyjny, co jest równoważne temu, że funkcja charakterystyczna zbioru C jest rekurencyjna. Ponieważ każda (i tylko) funkcja rekurencyjna jest *T–obliczalna*, czyli daje się obliczyć przy pomocy pewnej niesprzecznej maszyny Turinga, więc istnieje maszyna Turinga M_g, umiejąca rozstrzygnąć dla dowolnej liczby naturalnej k, czy $k \in C$. W szczególności, ponieważ $g \in C$, maszyna M_g potrafiłaby dowieść własnej niesprzeczności, a więc zgodnie z II twierdzeniem

Gödla, byłaby sprzeczna, a to jest niemożliwe, ponieważ zbiór C z założenia nie jest sprzeczny. Tak więc założenie o rekurencyjności zbioru C prowadzi do sprzeczności, co kończy dowód. Zbiór C nie jest zatem rekurencyjny. Zbiór C nie jest nawet rekurencyjnie przeliczalny, ponieważ gdyby był rekurencyjnie przeliczalny, to takim byłby również zbiór wszystkich indeksów maszyn sprzecznych, a zatem zbiór C byłby rekurencyjny, wbrew temu co zostało wykazane powyżej[5].

Jak łatwo zauważyć, funkcja totalna $F(k)$, określona następująco:

$$F(k) = \begin{cases} G_T(M_k), & \text{dla } k \in C, \\ \text{,,zdanie sprzeczne''} & \text{dla pozostałych } k, \end{cases}$$

gdzie $G_T(M_k)$ oznacza zdanie Gödlowskie dla k-tej maszyny Turinga. nie może być rekurencyjna, ponieważ w przeciwnym wypadku zbiór C byłby rekurencyjny, co byłoby sprzeczne z tym, co zostało wykazane powyżej. Aby sprawdzić, czy $k \in C$, dla dowolnego k, wystarczyłoby bowiem obliczyć $F(k)$. Funkcja $F(k)$ musi być zatem częściowa. W takim przypadku jednak, warunek $C \subseteq Dom(F)$ nie jest weryfikowalny w efektywny sposób, ponieważ pociągałoby to znów rozstrzygalność zbioru C. Nie jest zatem możliwa pełna automatyzacja dowodu na wyższość umysłu nad wszystkimi maszynami Turinga, ponieważ wymagał aby ona odróżnienia maszyn sprzecznych od niesprzecznych.

Antymechanicysta mógłby jednak rozumować następująco. Skoro sama konstrukcja zdania Gödla dla dowolnej maszyny, również sprzecznej, nie wydaje się problematyczna i może być, pod pewnymi warunkami[6], zautomatyzowana, nic nie stoi na przeszko-

[5] Dowolny podzbiór liczb naturalnych jest rozstrzygalny, wtedy i tylko wtedy gdy zarówno ten podzbiór jak i jego dopełnienie w zbiorze liczb naturalnych są rekurencyjnie (efektywnie) przeliczalne.

[6] Tworząc zdania Gödla automatycznie, nie możemy wykluczyć, że niektóre z nich okażą się fałszywe (w modelach standardowych).

dzie, aby wyprodukować zdania Gödla dla każdej maszyny „przed walką", a następnie **w razie potrzeby** pokazać je Mechanicyście. Wolno nam jednak pokazać zdania niedowodliwe wyłącznie maszynom niesprzecznym, natomiast maszynom sprzecznym musimy pokazać zamiast zdania Gödla coś innego, np. „czerwoną kartkę". Choć operacja ta nie może być efektywna, jak pokazano powyżej, to wydaje się, że przynajmniej jej część związana z samą konstrukcją zdań Gödla może być efektywna. W takiej sytuacji, gdyby w jakiś inny, niekoniecznie efektywny sposób udało się oddzielić maszyny niesprzeczne od sprzecznych, Antymechanicysta mógłby mieć pewność, że dla każdej niesprzecznej maszyny będzie umiał wskazać zdanie, którego ta maszyna nie potrafi dowieść.

Można próbować definiować funkcję F, użytą do konstrukcji zdań Gödla, jako funkcję totalną, mianowicie $F(k) = G_T(M_k)$, dla każdego k lub przyjąć założenie słabsze, jak zdaje się czynić Krajewski, pomniejszając ewentualnie dziedzinę funkcji F o te wartości k, dla których można efektywnie stwierdzić, że $k \notin C$. Przy takich określeniach funkcji F warunek $C \subseteq Dom(F)$ jest efektywny, przy czym wykluczony jest oczywiście przypadek $C = Dom(F)$. Ponieważ całe rozumowanie Krajewskiego ma charakter dowodu nie wprost, należy przyjąć, że F jest dowolną funkcją rekurencyjną częściową, której wartościami dla wszystkich $k \in C$ są zdania $G_T(M_k)$, natomiast dla $k \notin C$ wartość funkcji jest dowolna, lecz ustalona.

Liberalny warunek drugi[7] wymaga od Antymechanicysty tylko tego, aby dla każdej niesprzecznej maszyny M_k wskazał zdanie $F(k)$, którego ta maszyna nie dowodzi. Posługując się funkcją F, częściową lub totalną, zdefiniowaną jak wyżej, nie można wykluczyć, że Antymechanicysta wskaże dla niektórych maszyn **sprzecznych** zdanie Gödla, które jednak w tym przypadku nie będzie zdaniem niedowodliwym, ponieważ maszyna będzie sprzeczna. Warunek drugi wydaje się więc zbyt słaby na to, aby można

[7] Por. s. **??**.

było uznać wyższość umysłu nad maszyną. Sytuacja jest jednak jeszcze gorsza, ponieważ, jak się okazuje, przy powyższych założeniach funkcja F jest sprzeczna, czyli nie może istnieć[8].

Formalnie z powyższego rozumowania wynika przede wszystkim to, że próba efektywnego „wygödlowania" dowolnej niesprzecznej maszyny Turinga, a nawet efektywna konstrukcja zbioru zdań niedowodliwych, w którym są uwzględnione przynajmniej wszystkie maszyny niesprzeczne, przy warunkach 1 do 3 okazuje się niemożliwa. Oznacza to, że któryś z warunków jest zbyt mocny. Warunek pierwszy jest dobrze uzasadniony i nie będziemy chcieli z niego rezygnować. Należy więc zrezygnować z warunku dwa lub trzy. Warunek drugi jest i tak zbyt słaby, więc dalsze jego osłabianie nie ma sensu. Pozostaje więc rezygnacja z warunku trzeciego, tzn. z postulatu, iż funkcja F ma być rekurencyjna.

Wnioskiem z argumentacji, jest zatem stwierdzenie, iż, posługując się twierdzeniami Gödla, wyższości umysłu nad maszyną nie można wykazać w sposób formalny (efektywnie). Nie oznacza to oczywiście, że nie jest możliwe wykazanie tego faktu w inny sposób. Antymechanicysta nie będzie przecież upierał się, że procedura „wygödlowania" musi być mechaniczna. Dyskusyjne jest także przekonanie o tym, że tylko dowód formalny jest ostatecznie rozstrzygający. Nie jest oczywiste, czy każdy dowód w matematyce można przedstawić w postaci skończonego ciągu wyrażeń, z których każde jest bądź aksjomatem, bądź założeniem, bądź powstaje z poprzednich przez użycie reguły odrywania. Istnieją w matematyce dowody, które, jak uważają matematycy, nie są efektywne w powyższym sensie. Każde operowanie aktualną nieskończonością w dowodach nie może być efektywne[9]. Próba ostatecznego rozwiązania tej kwestii w sposób formalny, jak pokazały losy tzw.

---

[8] Por. S. Krajewski, op. cit., s. 145.

[9] Przykładem jest stosowanie tzw. ω–reguły, która odpowiada wnioskowaniu na podstawie nieskończonej liczby przesłanek. ???

programu Hilberta, na razie się nie powiodła. Jeżeli zatem ktoś uważa, że jego umysł przewyższa maszynę, musi to wykazać sam, nie może się w tym celu posłużyć żadnym automatem.

Rozważmy jeszcze co wynika z powyższej argumentacji dla Mechanicysty. Otóż Mechanicysta, jeżeli jest rzetelny, nie może ignorować ograniczeń systemów formalnych, jakie wynikają z twierdzeń Gödla. Aby podtrzymać swoje stanowisko, mógłby próbować wykazać, że procedura „wygödlowania", w oparciu o którą Antymechanicysta głosi wyższość umysłu nad maszyną Turinga, jest w zasięgu możliwości maszyny Turinga. Gdyby Mechanicysta wykazał, że możliwa jest konstrukcja funkcji rekurencyjnej, jak w argumentacji Krajewskiego, pokazałby równocześnie, aczkolwiek przy dość silnych z punktu widzenia mechanicyzmu założeniach, że sama możliwość wygödlowania nie wymaga ponad–mechanicznych umiejętności. Byłby to zatem dobry argument za tym, że twierdzenia Gödla nie obalają mechanicyzmu. Jak wykazano jednak wyżej, nie jest to możliwe. Wyrażając się nieco bardziej poetycko, o ile powyższe rożważanie pokazuje, że Antymechanicysta nie odnosi ostatecznego zwycięstwa, to dla Mechanicysty może ono oznaczać klęskę, o ile nie dostarczy on nowego argumentu.

Można w tym miejscu zadać pytanie, czy twierdzenia Gödla mają w ogóle jakikolwiek wpływ na rozważania o naturze umysłu. Odpowiedzią na to pytanie może być następujące rozumowanie przedstawione przez Benacerrafa[10]. Załóżmy, że S^* oznacza zbiór wszystkich zdań, które umysł przyjmuje. Niech zbiór ten będzie domknięty na konsekwencję logiczną, czyli powiększony o wszystkie te zdania, które wynikają logicznie z twierdzeń dowiedzionych przez umysł. Załóżmy dalej, że umysł dowodzi wyłącznie zdań prawdziwych, czyli jest adekwatny semantycznie, co pociąga bezpośrednio niesprzeczność S^*. Załóżmy w końcu, że fakt niesprzeczności umysłu jest nam wiadomy, czyli w jakiś sposób uzasadniony (niekoniecznie formalnie):

(i) $CONS(S^*) \in S^*$.

[10] P. Benacerraf, „God, the Devil and Gödel", *The Monist* 51 (1967), 9–32.

Niech W_k będzie pewnym rekurencyjnie przeliczalnym zbiorem zdań, przy czym k jest efektywnie danym indeksem odpowiedniej maszyny Turinga, generującej ten zbiór. Rozważmy teraz następującą sytuację. Po pierwsze przyjmijmy, że W_k jest zbiorem odpowiednio bogatym, to znaczy zawierającym tak zwaną słabą arytmetykę, i umiemy tego dowieść, czyli:
(ii) $(Ar \subseteq W_k) \in S^*$.

Warunek (ii) formalizuje nasze wymagania w stosunku do maszyny Turinga, eliminując na użytek dyskusji, zbyt proste systemy, do których nie stosują się twierdzenia Gödla. Skoro my „posiadamy" arytmetykę, to musi ją również zawierać W_k, aby maszyna ta mogła być kandydatem na model umysłu. Załóżmy teraz, że W_k zawiera się w S^* oraz umiemy tego dowieść:
(iii) $(W_k \subseteq S^*) \in S^*$.

Warunek (iii) wydaje się intuicyjny i zachodzi przynajmniej dla niektórych maszyn Turinga. W takich przypadkach W_k jest właściwym podzbiorem S^*. Warunki (i)–(iii) prowadzą do następujących wniosków. Zauważmy najpierw, że W_k nie może być sprzeczny oraz umiemy tego dowieść, mianowicie gdyby W_k był sprzeczny, to w związku z tym, że W_k zawiera się w S^* (na mocy (iii)), umysł również byłby sprzeczny, czyli $\neg CONS(S^*)$ byłoby prawdziwe, to zaś jest niemożliwe ze względu na (i) i adekwatność semantyczną S^*. Mamy więc:
(iv) $CONS(W_k) \in S^*$.

Rozważmy teraz, co stałoby się w sytuacji, gdy umysł byłby równoważny pewnej maszynie Turinga, czyli gdyby zachodzi:
(v) $S^* = W_k$, dla pewnego k.

Wtedy z (iv) oraz (v) otrzymujemy:
(vi) $CONS(W_k) \in W_k$,
co oznacza, że w systemie formalnym jest dowodliwa formalna niesprzeczność tego systemu. Na mocy twierdzenia Gödla możemy stąd wnioskować, że S^* jest sprzeczny. Jeżeli więc chcemy utrzymać założenie, że umysł jest niesprzeczny oraz równoważny pewnej maszynie Turinga, musimy zmodyfikować założenia (ii) lub (iii). Ponieważ założenie (ii) jest niezbędne z punktu widzenia rozwa-

żanego sporu, pozostaje jedynie odrzucenie założenia (iii). Mamy więc:
(vii) Jeżeli $W_k = S^*$ oraz S^* jest niesprzeczny, to $(W_k = S^*) \notin S^*$.

Zauważmy również, że w przypadku gdy W_k jest właściwym podzbiorem S^*, (iv) nie prowadzi do sprzeczności, nie musimy więc rezygnować z (iii). Ostatecznie z rozumowania Benacerrafa wynika, że jeżeli nie chcemy rezygnować z przekonania, że umysł jest niesprzeczny, to albo nie jesteśmy maszynami i nie jest wykluczone, że możemy tego dowieść, albo jesteśmy maszynami, lecz wtedy nie jesteśmy w stanie tego dowieść. Twierdzenia Gödla wykluczają więc sytuację, że jesteśmy niesprzecznymi maszynami i umiemy tego dowieść.

***

Na zakończenie rozważań dotyczących implikacji filozoficznych twierdzeń Gödla, wypada przyjrzeć się temu, co na ten temat miał do powiedzenia sam Gödel. Sądził on, że problemy, które pojawiły się w związku z badaniami nad matematycznym pojęciem obliczalności w ostatnich kilku dziesięcioleciach, koncentrują się wokół faktu, który można określić *nieuzupełnialnością* lub *niewyczerpalnością* matematyki[11]. Fakt ten daje o sobie znać, gdy mamy do czynienia z systemami aksjomatycznymi i dotyczy nie tyle wnioskowań warunkowych, co podstawowych twierdzeń matematyki samej w sobie (*mathematics proper*), które są prawdziwe w absolutnym sensie — „without any further hypothesis"[12]. Prawdy takie, uważa Gödel, istnieją bez wątpienia. Przykładem są twierdzenia finitystycznej matematyki, takie jak $2 + 2 = 4$ oraz *niektóre* [podkreślenie Gödla] reguły wnioskowań. Aksjomaty matematyki samej w sobie jawią się umysłowi tak konieczne i prawdziwe, że od uczucia tego „nie ma ucieczki" i żaden dowód ich prawdziwości nie jest

[11] „*Incompletability or inexhaustability*", por. K. Gödel, „Some basic theorems on the foundations of the mathematics and their implications", [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. III, Oxford Univ. Press, New York 1995, s. 305.
[12] *Ibidem*, s. 305.

potrzebny. Jeżeli chodzi o zakres owej absolutnej matematyki, to nie wszyscy są jednomyślni. Intuicjoniści oraz finitycyści odrzucają niektóre aksjomaty lub pojęcia, które są uznawane przez innych, np. zasadę wyłączonego środka lub ogólne pojęcie zbioru.

Nieuzupełnialność matematyki jest ogólnym wnioskiem z pierwszego twierdzenia Gödla i pojawia się w szczególności w teorii mnogości w związku z próbą jej aksjomatyzacji. Okazuje się, że jakkolwiek podalibyśmy aksjomatykę teorii mnogości, pod warunkiem, że zrobimy to w efektywny sposób, pewne prawdy teoriomnogościowe nie będą dały się ująć w tej aksjomatyce. Pojawią się mianowicie zdania niezależne, a co więcej jest to równoważne pewnym faktom z teorii liczb (teorii zbiorów skończonych), mianowicie nierozwiązywalności niektórych problemów diofantycznych. Nie istnieje bowiem efektywna procedura umiejąca rozstrzygnąć wszystkie problemy diofantyczne odpowiedniego typu. Nikt nie będzie w stanie, twierdzi Gödel[13], stworzyć jakiegokolwiek efektywnie danego systemu aksjomatycznego i wypowiedzieć o nim niesprzecznie następującego twierdzenia: „Wszystkie te aksjomaty i reguły postrzegam (z matematyczną pewnością) jako prawdziwe, a ponadto wierzę, że zawierają one całą matematykę"[14]. Jeżeli ktoś tak czyni, zaprzecza sam sobie. Aby móc tak stwierdzić, trzeba wiedzieć, że aksjomaty te są niesprzeczne, a tego nie da się wykazać w samym systemie aksjomatycznym – trzeba mieć wgląd „z zewnątrz". Niemniej nie należy wyciągać z powyższych rozważań pochopnych wniosków – na przykład odpowiedź na pytanie, „czy jakikolwiek efektywnie dany system aksjomatyczny może zwierać całą matematykę właściwą" zależy od tego, co rozumiemy przez matematykę właściwą (*mathematics proper*). Jeżeli przez matematykę właściwą rozumiemy system wszystkich prawdziwych zdań matematycznych, odpowiedź na powyższe pytanie

[13] *Ibidem*, s. 309.

[14] *„All of these axioms and rules I perceive (with mathematical certitude) to be correct, and moreover I believe that they contain all of mathematics"*,*ibidem*, s. 309.

jest negatywna. Natomiast gdy przez matematykę właściwą rozumiemy wszystkie zdania dowiedlne w danym systemie aksjomatycznym, odpowiedź jest pozytywna. Gödel prowadzi dalsze rozważania w oparciu o rozgraniczenie tych dwóch pojęć. Matematykę w sensie pierwszym nazywa matematyką *obiektywną*, natomiast matematykę w sensie drugim, matematyką *subiektywną*. Z II twierdzenia Gödla wynika, że matematyka obiektywna nie może być zaksjomatyzowana (w sposób efektywny), ponieważ twierdzenie wyrażające formalną niesprzeczność tego systemu choć prawdziwe, nie może być dowiedzione w tym systemie. Żadna maszyna Turinga nigdy nie będzie więc w stanie wyprodukować całej matematyki obiektywnej. W stosunku do matematyki subiektywnej nie można jednak wykluczyć, że taka maszyna Turinga może istnieć. Niemniej, jeżeli istnieje, to wykluczone jest, aby kiedykolwiek mogła wiedzieć z matematyczną pewnością, że jej twierdzenia to wszystkie poprawne twierdzenia matematyki (subiektywnej), ponieważ aby to stwierdzić, musiałaby wiedzieć, że jest niesprzeczna, a to wymaga wglądu z zewnątrz systemu. Maszyna jest w stanie stwierdzić niesprzeczność swoich twierdzeń jedynie dla skończonej liczby przypadków, aczkolwiek dowolnie dużej[15]. Gdyby umysł był maszyną Turinga, czyli gdyby tworzył matematykę subiektywną, to powyższe ograniczenia stosowałyby się również do niego[16] – nigdy nie byłby w stanie do końca zrozumieć swojego działania. Ta niemożliwość jawiłaby się mu błędnie jako nieograniczoność lub niewyczerpalność matematyki.

[15] Upraszczając, można powiedzieć, że jeżeli formuła $\phi(x)$ ma postać „x nie jest numerem gödlowskim dowodu zdania absurdalnego”, to maszyna jest w stanie dowieść tej formuły dla dowolnej liczby naturalnej, lecz równocześnie nie jest w stanie dowieść zdania ogólnego $\forall x\ \phi(x)$. Gdyby jednak nasz umysł był taką maszyną, to nie można wykluczyć, że niesprzeczność umysłu będzie mogła być dowiedziona w inny, nieformalny sposób, na przykład empirycznie, w oparciu o naukę o mózgu. Jest bowiem prawdopodobne, że mózg (choć nie umysł), jako skończony obiekt, działa analogicznie do maszyny Turinga.

[16] Por. rozumowanie Benacerrafa.

Powyższe rozważania Gödel podsumowuje alternatywą, którą można wyrazić następująco: *albo umysł nieskończenie przewyższa każdą maszynę Turinga, a więc matematyka jest nieuzupełnialna w tym sensie, że jej oczywiste prawdy nigdy nie będą mogły być wyrażone efektywnie danym zbiorem aksjomatów, albo istnieją absolutnie nierozwiązywalne problemy diofantyczne*[17]. Jest przy tym możliwe, że oba człony alternatywy są prawdziwe, choć Gödel wierzył, podobnie jak Hilbert, że w matematyce nierozwiązywalne problemy nie istnieją.

Filozoficzne wnioski z powyższej alternatywy są według Gödla następujące. Przede wszystkim, obydwie możliwości zdecydowanie implikują stanowisko antymechanicystyczne. Jeżeli pierwszy człon jest prawdziwy, to umysł nie da się zredukować do mózgu, który, jako obiekt fizykalnego świata, najprawdopodobniej jest skończonym automatem, ze skończoną liczbą neuronów i połączeń między nimi. Skoro więc umysł przewyższa mózg, to prowadzi to do jakiejś wersji mentalizmu. Jeżeli drugi człon jest prawdziwy, czyli gdy istnieją absolutnie nierozwiązywalne problemy matematyczne, to zdaje się to, według Gödla, obalać pogląd, że matematyka jest wyłącznie naszym własnym tworem. Jest tak dlatego, iż twórca musi z konieczności znać wszystkie własności swojego dzieła, jeżeli dzieło to, a tak jest w przypadku matematyki, powstaje niezależnie od świata zmysłowego (*a priori*). Prawdziwość drugiego członu wskazuje na to zatem, że przynajmniej niektóre obiekty i prawdy matematyczne istnieją obiektywnie, niezależnie od aktów mentalnych i subiektywnych decyzji matematyków, choć natura tych obiektów – ich sposób istnienia, nie jest w żaden sposób zdeterminowana przez powyższą alternatywę. Człon drugi prowadzi więc do platonizmu (realizmu pojęciowego).

---

[17] Oryginalne sformułowanie Gödla brzmi następująco: „*Either mathematics is incompletable in this sense, that its evident axioms can never be comprised in a finite rule, that is to say, the human mind (even within the realm of pure mathematics) infinitely surpasses the powers of any finite machine, or else there exist absolutely unsolvable diophantine problems of the type specified*”, K. Gödel, *Collected works...., op. cit*, s. 310.

Gödel formułuje kilka heurystycznych argumentów za platonizmem, twierdząc, wbrew formalistom, że matematyka jest syntetyczna. Jeden z tych argumentów brzmi następująco. Załóżmy, że twierdzenia matematyczne wyrażają jedynie pewne aspekty konwencji językowych, tzn. twierdzenia powielają jedynie te konwencje. Prawdziwość twierdzeń wynikałaby zatem z wcześniej zdefiniowanych znaczeń terminów w nich występujących, krótko mówiąc wszystkie twierdzenia byłyby analityczne oraz dałyby się sprowadzić, przez odpowiednie podstawienia, do tautologii postaci $a = a$. Gdyby jednak tak było, pisze Gödel, to sprawdzenie dla dowolnej formuły, czy jest poprawna, mogłoby odbyć się całkowicie automatycznie, a to jest niemożliwe, ponieważ systemy takie nie mogą być zupełne. Gödel pisze dalej, że w przypadku syntaktycznej interpretacji matematyki, nie istnieje żadne racjonalne uzasadnienie faktu, że klasyczna matematyka jest niesprzeczna czy „dająca się stosować (*applicable*)”[18].

Stojąc na gruncie platonizmu, Gödel uzasadnia potrzebę wzbogacania teorii aksjomatycznych o nowe aksjomaty[19]. Jednym z kryteriów w tym postępowaniu jest, obok intuicyjnej prawdziwości, użyteczność (*fruitfulness*) nowych aksjomatów w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Aksjomaty mają pozwolić odkryć nowe prawdy o obiektywnym świecie bytów matematycznych. Potrzeba taka jest szczególnie wyraźna na terenie teorii mnogości. Choć żaden elementarny system aksjomatyczny, dany w sposób rozstrzygalny, nie może być zupełny, co wynika z twierdzeń Gödla dyskutowanych powyżej, to możliwe jest jednak, że nowe aksjomaty teorii mnogości pozwolą rozstrzygnąć ważne problemy nierozstrzygalne na gruncie dotychczasowych aksjomatów[20]. Jedną z takich ważnych kwestii jest wspomniana *hipoteza continuum*.

[18] *Ibidem*, s. 318.

[19] K. Gödel, „What is Cantor’s continuum problem?”, op. cit.

[20] Być może nawet niektóre problemy dotyczące równań diofantycznych. K. Gödel, „What is Cantor’s continuum problem?”, *op. cit*, s. 182.

W poszukiwaniach nowych aksjomatów matematycy powinni dążyć do tego, by matematyka była jak najbardziej rozszerzana, a nie, jak próbowali robić intuicjoniści, ograniczana.