Semina □ Nr 7
Scientiarum 2008

Adam Midura

Anarchia czy metoda.
Filozofia matematyki a praktyka naukowa w Polsce dwudziestolecia międzywojennego

Wprowadzenie

Zgłębiając historię nauk formalnych i humanistycznych w Polsce dwudziestolecia międzywojennego, stajemy przed problemem wzajemnych stosunków pomiędzy metodami uprawiania matematyki, a filozoficznymi poglądami ludzi, którzy ją uprawiają. Podejmując próbę opisu zetknięcia się ze sobą dwóch zupełnie różnych obszarów ludzkiej refleksji, łatwo popaść w pewien bałagan pojęciowy i zrezygnować z drogi jasnego opisu. Chcąc tego uniknąć, na wstępie należy ściśle rozróżnić pewne elementy nakreślonej sytuacji problemowej.

Po pierwsze, można wyróżnić faktyczną metodę uprawiania matematyki, w skład której będą wchodzić wszystkie rodzaje działań umysłowych ludzi (w naszym wypadku idzie o twórców szkoły lwowsko-warszawskiej), które przez nich samych zostały uznane za *tworzenie matematyki*. Z drugiej strony odrębną grupę stanowią ich poglądy na to, co można, a czego nie można w dziedzinie naukowej, zwanej matematyką. Te ogólnie nazywać tu będziemy metodologią matematyki. Trzecim, badanym przez nas aspektem, jest filozofia matematyki. Tworzyć ją będzie pewien całokształt poglądów dotyczących tego, czym ze swej istoty jest matematyka, rozumiana jako wytwór działalności naukowej. Przedostatnią interesującą nas kategorią jest metafizyka, czyli ogólne poglądy na rzeczywistość – nie tylko tę matematyczną. Pytamy w niej o istniejące oraz o najbardziej ogólne właściwości tego, co istnieje. Ostatnim pojęciem jest metamatematyka – to specyficzny temat, który jeszcze zostanie poruszony.

Stwierdzić należy, że wyróżnione przez nas kategorie ludzkiej wiedzy (czy też ludzkich przekonań) nie są od siebie niezależne. Wpływają, przenikają się i pozostają do siebie nawzajem w rzeczywistym, badalnym i opisywalnym stosunku. Przedmiotem niniejszego referatu w sposób szczególny chciano uczynić współzależność pierwszej i trzeciej wyróżnionej przez nas kategorii – czyli, zgodnie z tytułem wystąpienia, wzajemny stosunek filozofii matematyki do praktyki naukowej. Jako szczegółowy przedmiot badania dla prostoty wybieramy poglądy tylko dwóch przedstawicieli szkoły lwowsko-warszawskiej: Stefana Leśniewskiego oraz Alfreda Tarskiego.

Zarysowanie tych dwóch postaw, które chcę przedstawić jako biegunowo sobie przeciwstawne, ma być przyczynkiem do ukazania problemu, który wydaje się mieć bardzo ogólną naturę. Mowa tutaj o tym, na ile pewien zakres ludzkich przekonań, jakim jest uprawiana filozofia szczegółowa, ma (lub też powienien mieć) moc determinowania sposobu postępowania w drugim zakresie przekonań, którym jest nauka.

Poglądy filozoficzne i matematyczne Stanisława Leśniewskiego

Stanisław Leśniewski pozostaje niejako na boku głównego nurtu szkoły lwowsko-warszawskiej. Inny przedstawiciel środowiska szkoły lwowsko-warszawskiej – Kazimierz Kuratowski – pisząc wspomnienia z tamtego okresu, ledwie o Leśniewskim napomyka[1]. Nie oznacza to jednak, jakoby miał on mieć mniejsze znaczenie w ówczesnym świecie naukowym. Mimo przedwczesnej śmierci, zniszczenia części dorobku naukowego podczas II Wojny Światowej, oraz ogromnego poziomu skomplikowania i trudnej notacji, jego prace wywarły znaczący wpływ na matematykę XX wieku.

[1] K. Kuratowski, *Pół wieku matematyki polskiej*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.

W omawianym okresie w filozofii matematyki panowały trzy poglądy: logicyzm, formalizm i intuicjonizm. Ciekawe jest, że główni przedstawiciele szkoły lwowsko-warszawskiej raczej nie opowiadali się za żadnym z tych poglądów. Leśniewski natomiast, który jako prawie jedyny zajmował jasne i dosyć konsekwentne stanowisko filozoficzne, opowiadał się za wszystkimi trzema poglądami naraz.

Po pierwsze zatem, jak pisze Woleński: „niewątpliwie wolno powiedzieć, że Leśniewski pracował w ramach bardzo ogólnie rozumianego programu logicyzmu, tj. redukcji matematyki do logiki w ramach poprawionej teorii typów”[2]. Jego postawa logicystyczna nie jest oczywiście tak konsekwentna, jak postawa Whiteheada, Russela czy Fregego. W szczególności odcinał się on od stwierdzenia, że zdania matematyki są zdaniami czysto analitycznymi[3], co jest jednym z założeń większości systemów logicystycznych. Niemniej jednak w swej filozofii matematyki Stanisław Leśniewski konsekwetnie opowiadał się za wyprowadzalnością zdań matematyki z aksjomatów logiki.

Dalej można powiedzieć, że Leśniewski był formalistą – i to w radykalnym sensie. Wymagał absolutnie jednoznacznej „kodyfikacji systemów formalnych”. Wbrew postulatom niektórych konstruktywistów, opowiadał się zatem za zachowaniem całości matematyki klasycznej. Formalizacja zaś (wraz z założeniem jej możliwości) była dla niego przede wszystkim środkiem służącym do rozwoju matematyki, bardzo ważnym także w kontekście relacji z „odbiorcami” teorii matematycznych, czyli innymi matematykami. Jak sam pisze, radykalny formalizm był przez niego wykorzystywany – i wydaje się, że postawa ta jest dosyć bliska pierwotnym założeniom Davida Hilberta, właściwego twórcy programu formali-

[2] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, PWN, Warszawa 1985, s. 179.

[3] Por. R. Murawski, „Filozofia matematyki w Polsce międzywojennej”, [w:] *Byt i sens. Księga pamiątkowa VII Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Szczecinie*, Szczecin 2005, s. 245.

stycznego, które zrodziły się z chęci ugruntowania matematyki bez konieczności jej redukowania czy wyrzucania pewnych działów.

Po trzecie natomiast, Leśniewski był zdeklarowanym intuicjonistą. Zdania matematyki i prawa logiki pełniły według niego rolę czegoś więcej, niż czystych reguł formalnych – miały one posiadać pewną intuicyjną treść i orzekać coś rzeczywistego o czymś rzeczywistym. Nie ma się tu na myśli platońskiej koncepcji matematyki – istnienie tych obiektów jest zagwarantowane przez ludzką myśl, nie zaś przez zanurzenie w jakiejkolwiek rzeczywistości transcendentnej. Jednakże sama myśl ludzka (intuicja) musi być w stanie jednoznacznie określić (skonstruować) obiekty, które matematyka opisuje. Sam Leśniewski pisze, że „nie ma żadnego upodobania" – co prawdopodobnie znaczyło, że absolutnie nie zgadza się z takim sposobem postępowania i nie nazwałby go matematyką – w, jak się wyraża, grach matematycznych operujących czysto formalnymi regułami przekształcania jednych pozbawionych znaczenia napisów w inne[4].

Jak już wspomniano, Leśniewski nie chciał mieć nic wspólnego z platońskimi koncepcjami w filozofii matematyki. Wyznawał nominalizm w pełnym tego słowa znaczeniu, dopuszczając realne istnienie tylko „jednostkowych napisów"[5] – niezależnie, czy były one „realizowane" na kartce, czy jedynie w umyśle. Żaden konkretny napis nie ma zatem specjalnego i bytowo niezależnego odpowiednika, czy odpowiedników gdzieś poza sobą, a tworzony (czy zapisywany) winien być według reguł konstruktywistycznych. Leśniewski odrzucał również pogląd, jakoby zdania i twierdzenia matematyki miały zawsze charakter czysto analityczny – czyli pełniący rolę zbioru pustych tautologii[6]. Przeciwnie, uprawianą przez siebie logikę uważał jednocześnie za dobrą teorię opisującą rzeczywistość.

Interesującym i godnym zauważenia faktem jest natomiast konsekwencja, z jaką omawiany matematyk podporządkowuje swoje

---

[4] Za: J. Woleński, dz. cyt., s. 138.
[5] Por. R. Murawski, dz. cyt., s. 245.
[6] Por. tamże, s. 246.

zainteresowania i działania wyznawanej przez siebie filozofii matematyki. O ile był on formalistą czystej krwi, o tyle mówi się, że jego prototetyka, mereologia i ontologia są jednymi z najlepiej skodyfikowanych systemów w historii dwudziestowiecznej logiki i matematyki. Połączenie nominalizmu i intuicjonizmu zaowocowało poglądem, że teoria matematyczna opisywać winna realny świat i być temu opisowi podporządkowana. Stąd Leśniewski jako matematyk jakby z założenia zupełnie nie zajmował się logikami wielowartościowymi, uważając, iż nie mogą sobie one rościć pretensji do odzwierciedlania otaczającego świata. Również twierdzenia Gödla nie wyprowadziły Leśniewskiego z orbity formalizmu, jako że według niego nie dotyczyły systemów matematyki intuicyjnej.

W istocie wygląda zatem, że matematyczna postawa Leśniewskiego została w znacznej mierze uwarunkowana przez wyznawaną przez niego filozofię matematyki, a może nawet metafizykę. Wśród członków szkoły lwowsko-warszawskiej był w opisanej postawie prawie odosobniony – mając jednego zaledwie sprzymierzeńca. Pisze Murawski: „Leon Chwistek i Stanisław Leśniewski stanowili wyjątek w opisanej postawie względem problemów filozoficznych logiki i matematyki, która dominowała w Polsce międzywojennej. Istotnie, ich poglądy filozoficzne miały decydujące znaczenie dla prowadzonych przez nich badań logicznych, te ostatnie były motywowane ich poglądami filozoficznymi”[7].

Alfred Tarski wobec problematyki filozoficznej

Należy teraz przystąpić do zarysowania postawy naukowej Alfreda Tarskiego przeciwstawionej jego poglądom filozoficznym.

Z pewnością Alfred Tarski nie był tylko logikiem i matematykiem – lecz także filozofem, do czego sam się chętnie przyznawał. By zarysować kontekst wypada przyjrzeć się jednemu z obszarów nauk formalnych, do rozwoju którego przyczynił się Tarski w spo-

[7] Tamże, s. 246.

sób szczególny. Idzie tu mianowicie o dziedzinę zwaną metamatematyką.

Co kryje się pod tym technicznym pojęciem? Otóż metamatematyka, którą uprawiał Tarski, nie była nauką filozoficzną, lecz dedukcyjną, zajmującą się pewnymi podstawowymi pojęciami logiki i matematyki. Sama metamatematyka była zatem naukowym systemem dedukcyjnym, traktującym o innym systemie dedukcyjnym. Wprowadzone tutaj rozróżnienie jest dosyć sztuczne i z logicznego punktu widzenia zbyteczne. Tak pisze Tarski w artykule *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*: „rozróżnienie między matematyką a metamatematyką jest właściwie nieistotne, ponieważ metamatematyka jest sama dyscypliną dedukcyjną, a więc z pewnego punktu widzenia częścią matematyki; wiadomo też, że wyniki uzyskane w jednej dyscyplinie dedukcyjnej mogą być – dzięki formalnemu charakterowi metody dedukcyjnej – automatycznie przeniesione na dowolną inną dyscyplinę, w której ta pierwsza ma interpretację”[8].

Już w tym miejscu dostrzec można pewien moment separacji metod metamatematycznych i matematycznych od poglądów filozoficznych. Tu również mocno rysuje się różnica poglądów Tarskiego i Hilberta. W swoim ogólnym kształcie były one dosyć podobne. A jednak metamatematyka Hilberta – jak pisze Woleński – „była wyraźnie podbudowana formalistyczną filozofią matematyki. Nic takiego nie miało miejsca w szkole warszawskiej. Metamatematyka była traktowana jako pewna nauka niezależna od takiej czy innej filozofii matematyki; w szczególności stosowano metody «zakazane» przez formalizm, tj. metody infinitystyczne, o ile były płodne dla określonych problemów”[9]. Jest to pierwszy moment, kiedy w poglądach Tarskiego dostrzegamy – może jeszcze nie spór – ale pewną niezależność filozofii od matematyki – i to niezależ-

[8] A. Tarski, „Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki”, [w:] *Pisma*, tom 1: *Prawda*, PWN, Warszawa 1995, s. 281.

[9] J. Woleński, dz. cyt., s. 155.

ność głęboko wpisaną w system i uwarunkowaną jego pierwszymi przesłankami.

Na tę kwestię wypada spójrzeć nieco głębiej. Jeśli idzie o filozoficzne poglądy Alfreda Tarskiego, to nie ma na ten temat wielu materiałów. Roman Murawski pisze, iż zasadniczo były one zbliżone do poglądów Koła Wiedeńskiego. Wyznawał zatem filozofię antymetafizyczną, naukową. Popierał program logicznej analizy pojęć, a także program empiryzmu. Przez długi czas ścieżki filozoficznej refleksji przemierzał tropem Leśniewskiego, szczególnie – co trzeba nam tutaj podkreślić – był pod urokiem jego konstruktywnego nominalizmu. Potem rozstał się z tymi poglądami, nie wyjaśniając jednak ani powodów tej zmiany, ani przybliżonego kierunku, w jakim się zwrócił. Ponadto „podkreślał, że nie ma ścisłej granicy pomiędzy naukami formalnymi i empirycznymi. Dopuszczał możliwość odrzucenia teorii logicznych i matematycznych na podstawie doświadczenia. Twierdził też, że nie istnieje wyraźna granica między prawdami logicznymi i faktycznymi”[10].

Pora wreszcie zapytać o praktykę naukową Tarskiego na gruncie matematyki. Po pierwsze trzeba podkreślić, że mimo skłonności intuicjonistycznych (czy konstruktywistycznych) „Tarski nie ograniczał repertuaru metod stosowalnych w metamatematyce do metod finitystycznych, ale dopuszczał każdy sposób dowodzenia twierdzeń, o ile prowadziło to do interesujących wyników”[11]. Jako dobry przykład można tu wymienić ważne twierdzenie kolegi Tarskiego ze szkoły lwowsko-warszawskiej – Adolfa Lindenbauma. Lemat Lindenbauma, akceptowany i używany przez Tarskiego, głosi, że dowolny niesprzeczny zbiór formuł można rozszerzyć do niesprzecznego i zupełnego zbioru formuł. Twierdzenie to jest nieefektywne – stwierdza możliwość tworzenia rozszerzeń, nie podając sposobu ich konstruowania. Zdecydowanie nie można go zaliczyć do twierdzeń zgodnych z postulatami intuicjonizmu w kształcie, jaki tej filozofii nadał Brouwer. Można zatem nieco żartobliwie po-

[10] R. Murawski, dz. cyt., s. 247.
[11] J. Woleński, dz. cyt., s. 179.

wiedzieć: Tarski oczywiście był intuicjonistą – wierzącym, lecz nie praktykującym.

Widać, że u Tarskiego między metodą a filozoficznymi przekonaniami zdarzały się konflikty. Wśród innych uczonych ze szkoły lwowsko-warszawskiej często panowała niechęć do poświęcania uwagi tak subtelnym kwestiom. Pisze Woleński: „w szkole [lwowsko-warszawskiej] uzyskano wiele ważnych wyników dotyczących logiki intuicjonistycznej, ale zainteresowanie logiką intuicjonistyczną nie wiązało się ze specjalnym zainteresowwaniem, nie mówiąc już o akceptacji, intuicjonistyczną filozofią matematyki”[12].

Kolejny interesujący problem, to sympatie nominalistyczne Tarskiego, o których również wspomina Murawski. W duchu tego typu filozofii mówi się, iż należy traktować zdania i nazwy w obrębie logiki i matematyki po prostu jako napisy o pewnym kształcie, a nie jako reprezentację realnie istniejących pojęć, czy sądów ogólnych. Zbiór jednostkowych napisów jako taki powinien być skończony, a przynajmniej przeliczalny. Tymczasem metamatematyka Tarskiego operuje pojęciami nieskończonego zbioru tez i nieskończonej formuły. Można zapytać, czy stosując tego typu pojęcia nie byłoby większą konsekwencją przyjęcie jakiejś wersji platonizmu, tak, jak w podobnej sytuacji uczynił to Kurt Gödel[13].

Podsumowanie

Przedstawione tutaj zostały dwa sposoby postępowania w obrębie nauk formalnych. Celem artykułu nie było wydanie osądu, który z nich można uznać za poprawny.

Jedno z nich polega na próbie utrzymania zgodności pomiędzy dwiema, powiązanymi ze sobą dziedzinami ludzkiego myślenia, jakimi w naszym przykładzie są matematyka i filozofia matematyki. Postawa taka z pewnością charakteryzowała przynajmniej twórców głównych prądów w filozofii matematyki: Russela i Whiteheada,

---

[12] J. Woleński, dz. cyt., s. 179-181.

[13] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów,* PWN, Warszawa 1995, s. 168.

Brouwera i Peano oraz ich szkoły. Chciano pokazać, że niektórym matematykom – jak choćby Leśniewskiemu, czy wyżej wymienionym – pewne ograniczenia związane z wyznawaną filozofią wcale nie przeszkodziły w pracy naukowej. Wręcz przeciwnie – dla wielu z pewnością poglądy z dziedziny filozofii matematyki mogły stanowić inspirację i koło zamachowe dla badań prowadzonych u podstaw matematyki. Ich stystemy i twierdzenia, które udowadniali nic nie straciły na tym, że oparte były o pewną specyficzną drogę myślenia filozoficznego. Drugi, przedstawiony tutaj sposób postępowania, to swego rodzaju przeciwieństwo dla takiego poszukiwania zgodności. Był on powszechną praktyką wśród polskich matematyków dwudziestolecia międzywojennego. Zakładał on przede wszystkim separację metod postępowania towarzyszących tworzeniu matematyki od filozoficznych poglądów danego matematyka. Te ostatnie miałyby być w dialogu naukowym najzupełniej prywatną sprawą, o której nie warto było wspominać – stąd dosyć niewiele wiemy na temat filozoficznych poglądów matematyków tamtego okresu.

Wydaje się, że taka postawa jest jednocześnie rezygnacją z pewnego wsparcia, jakie daje filozofia. Przede wszystkim neguje potrzebę czerpania inspiracji i poszukiwania ograniczeń metod matematycznych. Uprawianie matematyki wszelkimi możliwymi, a przede wszystkim skutecznymi, sposobami, z pewnością rozwiązuje poważny problem niepewności i niejednostajności w filozoficznym obrazie świata. Trudno byłoby oczekiwać, by matematyk zmieniwszy jakąś część swych poglądów metaficznych winien był rezygnować ze wszystkich swych wyników, które osiągnął niedozwolonymi przez właśnie przyjęty system metodami. A zatem, co również przyznaje sam Woleński, taką postawę cechuje pewna świeżość spojrzenia i twórcza wolność od wszelkich niebezpieczeństw, związanych ze sztywnym przywiązaniem do filozofii danego typu. Ostatecznie: czemu matematyka ma brać na siebie kłopotliwy bagaż niepewności, którym obciążona jest każda teoria filozoficzna?

Bibliografia

1. Kuratowski K., *Pół wieku matematyki polskiej*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.
2. Murawski R., „Filozofia matematyki w Polsce międzywojennej", [w:] *Byt i sens. Księga pamiątkowa VII Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Szczecinie*, Szczecin 2005.
3. Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995.
4. Tarski A., „Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki", [w:] *Pisma, tom 1: Prawda*, PWN, Warszawa 1995.
5. Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, PWN, Warszawa 1985.