Semina ☐ Nr 7
Scientiarum 2008

Małgorzata Stawarz

Starożytnych zmagania z nieskończonością. Od Pitagorasa do Eudoksosa

Wstęp

Historia nauki dostarcza przykładów przedstawiających odkrycia, które wstrząsnęły ludzką myślą, stawiając człowieka w obliczu czegoś nieintuicyjnego, kłócącego się z wyobrażeniami. Do rangi rewolucyjnej idei urosła niewątpliwie koncepcja nieskończoności, która wymusiła inne spojrzenie na matematyczny aspekt rzeczywistości. Pojęcie nieskończoności wiąże się przede wszystkim z wiekiem XIX oraz z nazwiskiem Georga Cantora – matematyk ten rozwinął podstawy teorii mnogości, przyjmując istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych. Jednak początków refleksji na powyższy temat należy doszukiwać się już w starożytności. „W piątym lub szóstym wieku przed naszą erą Grecy odkryli nieskończoność. Było to dla nich pojęcie tak zniewalające, dziwaczne, sprzeczne z ludzką intuicją, że skonfundowało filozofów i matematyków, którzy je wprowadzili. Dwa i pół tysiąca lat później konsekwencje tego odkrycia miały wywrzeć znaczący wpływ na świat matematyki, filozofii i religii”[1]. Celem niniejszego opracowania jest próba sięgnięcia do korzeni, czyli pierwszego zetknięcia się myśli ludzkiej z tą zupełnie nieintuicyjną koncepcją, która odbiła się szerokim echem na późniejszym rozumieniu matematyki.

[1] Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów*, tłum. T. Hornowski, Dom Wydawniczy Rebis, Poznań 2002, s. 15.

Niewymierność drogą do problemu nieskończoności

Pitagorejska wizja świata

Temat nieskończoności niewątpliwie nasuwa na myśl poglądy Zenona z Elei, a konkretnie jego słynne paradoksy: dotyczące niemożliwości ruchu oraz aporie mnogościowe. Jednak fundamentów należy szukać dużo wcześniej w historii nauki, na co zwraca uwagę Amir D. Aczel, stwierdzając, że „korzenie nieskończoności tkwią w dokonaniach starszego o sto lat od Zenona największego matematyka starożytności, Pitagorasa”[2]. Przyjrzyjmy się zatem w pierwszej kolejności poglądom pitagorejczyków, których działalność rozwijała się w szkole założonej przez Pitagorasa w VI wieku p.n.e. Istotne jest, by na początku zwrócić uwagę na system metafizyczny, którego wyznawcami byli wspomniani filozofowie, stanowiący fundament ich rozważań w dziedzinie matematyki. Kluczowe jest tutaj pojęcie liczby jako zasady wszystkiego, cechy konstytutywnej świata. „Pitagorejczycy pierwsi uprawiali systematycznie nauki matematyczne i z tego powodu pierwsi zauważyli, że cały szereg rzeczy i zjawisk przyrodniczych da się wyrazić w relacjach liczbowych i można je przedstawić w sposób matematyczny”[3]. Pojęcie liczby w filozofii pitagorejskiej rozumiane było w bardzo wąskim zakresie, gdyż liczbami *sensu stricto* były tylko liczby naturalne, czyli całkowite dodatnie. Chociaż pitagorejczycy znali prawa podzielności liczb naturalnych i potrafili formułować proporcje, nie wychodzili *de facto* poza ramy zbioru liczb naturalnych. Przedstawiając i porównując stosunek dwóch liczb do dwóch innych, nie traktowali go jako nowego obiektu, lecz przedstawiali tylko i wyłącznie w kategoriach proporcji liczb naturalnych. „Ich [liczb naturalnych – M. S.] wyróżnione miejsce w matematyce odkryto niedługo po tym, jak myśliciele greccy zaczęli poszukiwać w swych docie-

---

[2] Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów,* dz. cyt., s. 16.

[3] Giovanni Reale, *Historia filozofii starożytnej,* t. I, tłum. Edward Iwo Zieliński, RW KUL, Lublin 2000, s. 110.

kaniach pierwotnego budulca, *arche*, od którego pochodzi i z którego zbudowany jest cały świat"[4]. Oparty na liczbach naturalnych pitagorejski model rzeczywistości był wyrazem mentalności pierwszych filozofów, w której tkwiło przekonanie o jednej prazasadzie jako podstawie i istocie całego wszechświata. Rdzeniem wyznawanej przez pitagorejczyków metafizyki było rozumienie jedności jako czegoś, na czym ufundowane zostały kolejne liczby, którym przypisywali określone znaczenie i symbolikę[5]. „Koncepcja ta uzmysławia nam, że mieli oni pewne pojęcie o nieskończoności, gdyż z każdej liczby – niezależnie od tego, jaka byłaby duża – mogli stworzyć liczbę większą, po prostu dodając do niej jeden"[6]. Tym samym idea nieskończoności zaczynała się powoli wkradać do myśli ludzkiej. Jeśli jednak pitagorejczycy rzeczywiście mieli pojęcie tzw. potencjalnej nieskończoności[7], to, o ile mogło ono gimnastykować ich umysły, nie wywoływało prawdopodobnie większej konsternacji. Wydaje się, że w niczym nie zakłócało ich przekonania o mistycznym charakterze liczb – *de facto* wciąż pozostawali w dziedzinie liczb naturalnych, mimo, iż mieli świadomość ich nieograniczonego wzrostu.

Odkrycie niewymierności

Problem pojawił się wraz z pewnym ważnym odkryciem, które wstrząsnęło fundamentami pitagorejskiego modelu rzeczywistości. Dotyczyło ono niewspółmierności odcinków, który to fakt tak przeraził pitagorejczyków, że próbowali swe odkrycie zataić przed

---

[4] Jerzy Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym,* wyd. Biblos, Tarnów 2000, s. 31.

[5] Przykładowo, 2 oznaczała linię, 3 – trójkąt, 4 – ostrosłup, 10 – liczbę doskonałą, itp.

[6] Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów,* dz. cyt., s. 18.

[7] Pitagorejczycy nie używali jeszcze tego pojęcia. Rozróżnienie na nieskończoność potencjalną (np. możliwość dodawania kolejnych liczb naturalnych) i aktualną (istniejącą jako określony zbiór, dany cały naraz) wprowadził dopiero Arystoteles, przy czym uznawał tylko pierwszą możliwość. Zagadnienie to opisuje w III Księdze *Fizyki.*

światem. Trudno się dziwić ich zaskoczeniu, gdy okazało się, że zbudowany model świata, wydawałoby się, tak pewny i solidny, runął, gdy ujawniła się w nim niewymierność. Jej istnienie filozofowie uświadomili sobie wraz z odkryciem, że pewnych liczb nie da się zapisać jako ilorazu dwóch liczb naturalnych. Naprowadziło ich na to twierdzenie, sformułowane przez nich samych, mówiące, że w trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej podniesionej do kwadratu jest równa sumie długości kwadratów pozostałych boków. Pitagorejczycy natknęli się w swych analizach na trójkąty, w których zastosowanie wspomnianego twierdzenia dowodzi istnienia innych liczb, np. trójkąt o przyprostokątnych równych jeden daje długość przeciwprostokątnej równą pierwiastkowi kwadratowemu z liczby dwa, który nie da się przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb naturalnych. Szokujące odkrycie ujawniło niekompletność na gruncie przyjętej przez pitagorejczyków teorii miary i prób opisania świata za pomocą znanej i stosowanej arytmetyki – okazało się, że istnieją wielkości, które nie mogą być wyrażone za pomocą znanych metod. Powstałe trudności dowiodły niewystarczalności metod arytmetycznych, stosowanych do zjawisk świata mającego również geometryczny aspekt – geometria okazała się niearytmetyzowalna[8].

Niewymierność nie mieściła się w głoszonych przez pitagorejczyków poglądach również dlatego, że prowadziła bezpośrednio w świat nieskończoności. Liczby niewymierne nie mogą być bowiem przedstawione za pomocą skończonej liczby cyfr, gdyż mają nieskończone rozwinięcie dziesiętne.

Ponadto, konsekwencje odkrycia niewymierności miały jeszcze inny wymiar – uderzyły w cały metafizyczno-religijny system pitagorejski. Rezonans ten wyraźnie podkreśla Amir D. Aczel:

> Odkrycie liczb niewymiernych było katastrofą dla pitagorejczyków, gdyż liczby stały się dla nich czymś w rodzaju religii. „Wszystko jest liczbą" – brzmiała dewiza ich bractwa. A przez l i c z b y rozumieli liczby naturalne lub ich

[8] Por. Jerzy Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, dz. cyt., s. 37.

> stosunki. Istnienie pierwiastka z dwóch, liczby, która przypuszczalnie nie dawała się wyrazić w postaci ilorazu dwóch boskich tworów, stanowiło zagrożenie dla całego ich systemu religijnego. A w czasie, gdy dokonano tego odkrycia, pitagorejczycy byli już liczną społecznością, która zgłębiała potęgę i tajniki liczb[9].

Kryzys w matematyce starożytnej, spowodowany omówionymi odkryciami, skierował rozważania w świat nieskończoności i zapoczątkował tym samym nową drogę w dziedzinie matematyki. Widmo nieskończoności powróciło w V w. p.n.e. pod postacią paradoksów, w które uwikłany jest problem przeliczalności nieskończonej ilości elementów. Kolejne etapy rozwoju nowej myśli naznaczone są zmaganiem się filozofów z pewnymi własnościami świata nieskończoności, nie przystającymi zupełnie do metod stosowanych w świecie wielkości skończonych.

Paradoksy nieskończoności

Słynne paradoksy Zenona z Elei[10] mimo, iż w konsekwencji ukazywały ten sam problem, koncentrowały się na dwóch głównych kwestiach: niektóre miały na celu wykazanie niemożliwości ruchu, inne dotyczyły zagadnienia wielości. Jeden z najsłynniejszych paradoksów pierwszego rodzaju znany jest pod nazwą: „Achilles i żółw". Najszybszy biegacz starożytności staje do wyścigu z żółwiem, który startuje trochę wcześniej. Zenon dowodzi, że Achilles nigdy nie dogoni żółwia, jeśli bowiem dobiegnie do miejsca, gdzie znajdował się żółw, ten przebędzie w tym czasie kolejny odcinek drogi. W ten sposób zawsze pozostanie dla biegacza poza zasięgiem. Inny znany przykład, zwany paradoksem dychotomii, stwierdza, że nie jest możliwe pokonanie jakiejś odległości, gdyż najpierw trzeba przejść połowę, następnie połowę połowy i tak dalej w nieskończoność. W związku z tym, nigdy nie przebędziemy całej odległości,

---

[9] Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów,* dz. cyt., s. 21.

[10] Najsłynniejsze z nich to aporie: Achilles i żółw, dychotomia, strzała, stadion.

zawsze pozostanie część, którą można podzielić na pół. Zenon sformułował również aporie mnogości, spośród których najsłynniejsza, tzw. aporia miary, stwierdza: „Jeśli istnieje mnogość, to powinna ona jednocześnie być wielka i mała, i przy tym wielka bez granic i mała do zniknięcia"[11]. Innymi słowy, rozważając odcinek jako zbiór nieskończonych części, które są niepodzielne, musimy wziąć pod uwagę dwie sytuacje. W pierwszym przypadku poszczególne niepodzielne części są równe zeru i wówczas miara całego odcinka wynosi zero. W drugim natomiast, zakładając, że niepodzielne części mają jakąś wielkość, miara odcinka, jako suma nieskończonej ilości części, będzie nieskończona.

Ogólnie rzecz ujmując, problem, który tkwi w przedstawionych paradoksach, dotyczy przeliczalności nieskończonego zbioru odcinków. „Aporia mnogościowa Zenona wykluczała dla starożytnych przyjęcie nieskończonej ilości niepodzielnych elementów"[12]. Nie do przyjęcia była sytuacja, że nieskończona liczba części w sumie daje pewną skończoność – miarę odcinka. Rozumowanie teoretyczne ponadto nie pokrywało się z obserwacją, zgodnie z którą przebycie w skończonej liczbie kroków sugerowanej w paradoksach odległości było wykonalne. W aporiach związanych z ruchem punkt wyjścia dotyczy jeszcze jednej kwestii. Zenon związany był ze szkołą eleatów, która propagowała poglądy swego mistrza Parmenidesa. Zgodnie z koncepcją tego filozofa, byt jest niezmienny i całkowicie nieruchomy. Zenon próbował zatem pokazać paradoksalność ruchu poprzez sprowadzenie do sprzeczności rozumowania, które ruch zakładało[13].

[11] Cytat i omówienie aporii, por.: I.G. Baszmainowa, „Grecja starożytna" [w:] *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, tom pierwszy, pod red. A. P. Juszkiewicza, tłum. Stanisław Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975, s. 99.

[12] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki ...*, dz. cyt., s. 78.

[13] Szkoła Parmenidesa uznawała tylko wiedzę opartą na rozumowaniu dedukcyjnym (na prawach logiki: tożsamości i sprzeczności), a odrzucała obserwacje świata fizycznego, jako zmiennego. Na tej właśnie metodzie ugruntowane jest rozumowanie Zenona. Por. J. Dadaczyński, dz. cyt., s. 70, przyp. 58.

We wspomniane paradoksy uwikłany jest również następujący problem: starożytni Grecy nie znali jeszcze pojęcia nieskończoności aktualnej, gdzie wszystkie elementy są dane naraz tworzą całość. Przedstawiając nieskończoność, jako konsekwencję dodawania do siebie kolejnych wielkości (lub dzielenia jej na coraz mniejsze części), posługiwali się tokiem rozumowania, który w przypadku skończonej ich ilości jest poprawny, natomiast w zastosowaniu do nieskończoności dawał efekty w postaci paradoksów. Amir D. Aczel podsumowując greckie dywagacje na omawiany temat, stwierdza: „Paradoksy te uwidaczniają kłopotliwe właściwości nieskończoności i pułapki, jakie na nas czekają, gdy spróbujemy zrozumieć istotę nieskończonych procesów lub zjawisk”[14]. Ponadto, na ciekawą rzecz zwraca uwagę Charles Seife w książce „*Zero. Niebezpieczna idea*”[15]. Problem, według autora, wiąże się z nieznajomością liczby zero w starożytnej Grecji: Związek nieskończoności z zerem jest obecny we wspomnianych paradoksach, w których nieskończona suma dążących do zera składników, daje w efekcie skończony wynik. Jednak starożytni Grecy nie potrafili jeszcze w ten sposób spojrzeć na problem. „Nie znali koncepcji granicy, gdyż nie wierzyli w istnienie zera, a wskutek tego nie potrafili poradzić sobie z nieskończonością. Rozważali tę koncepcję, ale odrzucali możliwość, by wielkości nieskończenie małe i nieskończenie wielkie zostały zaliczone do liczb. Był to największy błąd greckiej matematyki i jedyna przeszkoda, która uniemożliwiła Grekom odkrycie rachunku różniczkowego”[16].

W kontekście nieskończoności warto jeszcze wspomnieć o problemie, z jakim zetknął się, również w V wieku p.n.e., grecki myśliciel Antyfon. Próbował on pozytywnie rozstrzygnąć zagadnienie kwadratury koła. Jego rozumowanie przedstawiało się następująco: w koło można wpisać kwadrat, a następnie przenieść go poza obwód koła. Dalej, w koło da się wpisać ośmiokąt, i zbudować

[14] Amir D. Aczel, *Tajemnica* alefów, dz. cyt., s. 16.

[15] Charles Seife, *Zero. Niebezpieczna idea,* tłum. J. Skolimowski, wyd. Amber, Warszawa 2002.

[16] Ch. Seife, *Zero...*, dz. cyt., s. 42.

kwadrat równy jego polu. Ogólnie algorytm polega na wpisywaniu w koło wielokąta, za każdym razem podwajając ilość jego boków i konstruując kwadrat o powierzchni równej powierzchni wpisanego wielokąta. W ten sposób Antyfon doszedł do wniosku, że koło jest wielokątem o nieskończonej liczbie boków, a co za tym idzie, można skonstruować kwadrat o polu równym polu koła. Rozumowanie wydaje się poprawne, jednak Antyfon popełnił istotny błąd – założył, że wielokąt o nieskończonej liczbie boków posiada własności charakteryzujące wielokąty, których liczba boków jest skończona. Dokonał tym samym nieuprawnionego przeniesienia do nieskończoności, zabiegu z dobrym skutkiem stosowanego w przypadku wielkości skończonych[17]. Ponownie ujawniła się odmienna natura nieskończoności, wymykająca się ujęciu intuicyjnemu, traktującemu ją jako przedłużenie procesu skończonego. Amir D. Aczel wskazuje w kontekście problemu kwadratury koła na fakt, iż kwestie te obejmowały wyłącznie płaszczyznę teoretyczną – będąc „wyzwaniem czysto intelektualnym", bez odwoływania się do praktyki, stały się przykładem zagłębiania się greckich matematyków w czysto abstrakcyjne obszary[18].

Demokryt i próba stworzenia matematyki skończonościowej

Ogół zagadnień związanych z nieskończonością zdominował środowisko matematyczne w pewnym okresie w starożytności, wciąż dostarczając podstaw do analiz, jak również wyznaczając nowe kierunki rozwoju. Zwraca na ten aspekt uwagę J. Dadaczyński, gdy podsumowuje ówczesną sytuację:

[17] Por. np. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, dz. cyt., ss. 68–69.

[18] Por. Amir D. Aczel, *Tajemnica* alefów, dz. cyt., s. 75. Innymi słynnymi zagadnieniami tego typu były w starożytnej Grecji: problem trysekcji kąta (podziału kąta na trzy równe części) oraz podwojenia sześcianu (znalezienie sześcianu, którego objętość byłaby dwukrotnie większa niż objętość sześcianu danego).

> W piątym i czwartym wieku p.n.e. cała problematyka nieskończoności i ciągłości, spowodowana odkryciem niewymierności, zagadnieniami miary oraz aporiami Zenona, była bardzo żywo dyskutowana. Zastanawiano się nad możliwością zaakceptowania lub odrzucenia zbiorów aktualnie nieskończonych. Dyskutowano nad tym, czy wielkości ciągłe (odcinki, pola, czas) składają się z niepodzielnych części i nad tym, jaka jest liczba owych niepodzielnych części. Aporia mnogościowa Zenona wykluczała dla starożytnych przyjęcie nieskończonej ilości niepodzielnych elementów. Przyjęcie skończonej ilości elementów o mierze różnej od zera też nie wchodziło w rachubę, bo taką wielkość można było podzielić na połowy. Niemniej pojawiły się również próby (Demokryt) stworzenia takiej matematyki *skończonościowej*[19].

Przyjrzyjmy się zatem nowemu przejawowi zainteresowania tematyką nieskończoności. Wspomniana w cytowanym fragmencie koncepcja matematyki skończonościowej Demokryta ufundowana jest na atomistycznej wizji świata. W myśl tego poglądu wszystkie wielkości składają się z małych, niepodzielnych elementów, o mierze różnej od zera. Miara figury byłaby określana poprzez sumowanie miar skończonej ilości poszczególnych części. Pomijając pytanie, czy rzeczywiście możemy przyjąć istnienie niepodzielnych na części atomów, tak wprowadzona metoda określania wielkości napotyka na inną trudność: skończona ilość podstawowych elementów nie daje miary całej figury, zwłaszcza bardzo nieregularnej, pozostają bowiem niezmierzone najmniejsze części[20]. Komentując dokonania Demokryta w dziedzinie matematyki, I. Baszmakowa stwierdza:

> Sposób Demokryta – sposób zbudowania „matematyki skończonej" – był zupełnie nieprzydatny dla badania wielkości ciągłych, nie mówiąc już o przedstawieniu i badaniu ruchu. Niemniej jednak w koncepcji Demokryta zawarta była bardzo płodna myśl,

[19] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, dz. cyt., s. 78.
[20] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, dz. cyt., s. 79.

> którą po raz pierwszy należycie ocenił i rozwinął dopiero Archimedes. Mamy na myśli zasadę, ogólnie mówiąc, przybliżonego, lecz dowolnie dokładnego zestawienia jakichkolwiek brył z dużej liczby części elementarnych, których rozmiary są znane[21].

W stronę nieskończenie małych

Koncepcja Demokryta zapoczątkowała dokładniejsze analizy problemu istnienia nieskończenie małych elementów. Silnego bodźca dostarczył na tym gruncie, żyjący w V wieku p.n.e., Anaksagoras. Sformułowane przez niego twierdzenie: „W małym nie istnieje najmniejsze, lecz zawsze jest jeszcze mniejsze”[22] wprowadziło koncepcję o podzielności elementów na coraz mniejsze części. W tym kontekście z ideą nieskończoności próbował zmierzyć się matematyk grecki – Eudoksos z Knidos. Zasłynął on dzięki wprowadzeniu teorii stosunków, pozwalającej na określenie proporcji wielkości opisanych nie tylko przez liczby naturalne, ale również przez odcinki, figury płaskie czy przestrzenne, oraz tak zwanej metody wyczerpywania. W metodzie tej za punkt wyjścia został obrany lemat: „jeśli dane są dwie wielkości a i b, gdzie $a > b$, to odejmując od wielkości a więcej niż jej połowę, od otrzymanej reszty więcej niż jej połowę itd., otrzymamy po skończonej liczbie kroków resztę $\alpha_n < b$”[23]. Eudoksos wykorzystywał lemat do obliczenia miary figur, gdyż wynikało z niego, że można utworzyć rosnący ciąg wielkości od $\boldsymbol{a}_1$ do $\boldsymbol{a}_n$, taki, że reszta α_n będzie mniejsza od dowolnie małego b. Jego metoda, nazwana metodą wyczerpywania, polegała na obliczaniu pól powierzchni skomplikowanych figur w ten sposób, że dzielono je na małe, proste części, po czym dodawano ich pola powierzchni lub, w przypadku brył, objętości. Dzięki temu przybliżano się do miary danej figury. O sile metody Eudoksosa świadczy fakt, że posługując się nią udowodnił między innymi, że

---

[21] I.G. Baszmkowa, dz. cyt., s. 103.
[22] Tamże.
[23] Cyt. za: I. Baszmakowa, dz. cyt., s. 111.

objętość ostrosłupa stanowi 1/3 objętości graniastosłupa mającego tą samą podstawę i wysokość, taki sam jest również stosunek objętości stożka i walca o tej samej podstawie[24]. Zasługą matematyka z Knidos było niewątpliwie wskazanie możliwości samego pomyślenia wielkości coraz mniejszych, dążąc przy tym do nieskończoności, bez potrzeby wskazywania tych wielkości. „Eudoksos pokazał, że nie musimy zakładać faktycznego istnienia nieskończenie wielu nieskończenie małych wielkości, jakimi posługujemy się przy takich obliczeniach. Wystarczy nam założenie, że istnieją wielkości „tak małe, jak sobie tego zażyczymy", które możemy otrzymać przez ciągłe dzielenie danej całości"[25]. Należy tu wspomnieć, że metody powyższe kontynuował w III wieku p.n.e. Archimedes, który korzystając ze sposobu Eudoksosa, wyznaczył pola powierzchni i objętości wielu figur i brył. Impulsem stały się tu próby zmierzenia pola paraboli, trudność stanowił jednak jej nieregularny kształt. Archimedes wymyślił jednak sposób na obliczenie pola powierzchni paraboli, poprzez wpisywanie w nią coraz mniejszych trójkątów. Tak utworzony ciąg figur pozwolił na obliczenie pola powierzchni paraboli, dzięki sumowaniu pól coraz mniejszych jej fragmentów. Wynik był tym dokładniejszy, im mniejsze trójkąty były wpisywane w niewypełnione jeszcze miejsca paraboli, co jest często przytaczane jako antycypacja rachunku całkowego, używanego współcześnie do liczenia pól skomplikowanych figur czy objętości brył.

Podsumowanie

Studia nad rozumieniem nieskończoności przez starożytnych Greków uzmysławiają, jak sporym wyzwaniem było dla nich to zagadnienie. Stanąwszy twarzą w twarz z nieznanym i dość enigmatycznym pojęciem, nie potrafili sobie z nim poradzić, co więcej, odczuwali wyraźny lęk przed nieskończonością[26]. Wydaje się, że

[24] Przykłady podaję za: I. Baszmakowa, dz. cyt., s. 112.

[25] Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów...*, dz. cyt., ss. 24–25.

[26] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki...*, dz. cyt., s. 99.

można wskazać co najmniej dwie przeszkody utrudniające badanie problemu nieskończoności. Po pierwsze, kwestia założeń. Tym, co, wydaje się, hamowało filozofów i matematyków w V wieku p.n.e. była próba dostosowania nieskończoności do założeń, które czynili wobec rzeczywistości. Pitagorejczycy chcieli związać matematykę z ich koncepcją świata, opierającą się na liczbach naturalnych i w której nie było miejsca na tak dziwaczne i niezrozumiałe rzeczy jak niewymierność. Zenon z Elei próbował obronić głoszony przez Parmenidesa pogląd o jednym, nieruchomym bycie. W obu przypadkach opieranie się na przyjętych fundamentach mogło blokować drogę do dalszych rozważań. Druga kwestia, stawiająca myślicieli w kłopocie, związana jest z faktem, że nieskończoność posiada własności, które nie znajdują odzwierciedlenia w świecie skończonym. W związku z tym, stosowanie w obszarze nieskończoności operacji dozwolonych w przypadku wielkości skończonych było zabiegiem nieuprawnionym[27]. Wymagało to bowiem zmiany paradygmatu, innego spojrzenia, pewnego skoku myślowego. Pierwsi filozofowie, dyskutujący pojęcie nieskończoności, nie zdołali jeszcze tego dokonać. Jak pokazuje historia, wymagało to sporej ilości czasu. Jednak podejmowane kolejno próby zmierzenia się z nieskończonością świadczą o głębokim zainteresowaniu problemem i świadomości, że coś w ich rozważaniach zawodzi i należy szukać dalej.

Generalnie jednak wkład, jaki myśliciele w VI i V wieku p.n.e. wnieśli do omawianego zagadnienia, zaowocował w historii nauki stworzeniem metod umożliwiających zmierzenie się z wielkościami nieskończonymi. Długi okres czasu, jaki był potrzebny do wprowadzenia teorii zbiorów nieskończonych, ukazuje jeszcze wyraźniej złożoność problemu. Chociaż rozwój różnych gałęzi matematyki w znacznym stopniu przyczynił się do uporządkowania naszej wiedzy dotyczącej nieskończoności, jednak wciąż na tym terenie pozostaje wiele pytań i niejasności, otwierających drogę do badań i szczegółowych analiz matematyków i filozofów.

[27]Bardzo dobrze ilustruje to wskazany problem kwadratury koła rozważany przez Antyfona.

Bibliografia

1. Amir D. Aczel, *Tajemnica alefów*, tłum. T. Hornowski, Dom Wydawniczy Rebis, Poznań 2002.

2. I.G. Baszmakowa, „Grecja starożytna", [w:] *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, tom pierwszy, pod red. A. P. Juszkiewicza, tłum. Stanisław Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975.

3. Jerzy Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, wyd. Biblos, Tarnów 2000.

4. Giovanni Reale, *Historia filozofii starożytnej*, t. I, tłum. Edward Iwo Zieliński, RW KUL, Lublin 2000.

5. Charles Seife, *Zero. Niebezpieczna idea*, tłum. J. Skolimowski, wyd. Amber, Warszawa 2002.