Semina Scientiarum ☐ Nr 13 2014
s. 56–78
DOI: http://dx.doi.org/10.15633/ss.685

Marlena Fila

Kryzys podstaw matematyki przełomu XIX i XX wieku

1. Kilka słów o matematyce końca XIX wieku

Filozofia matematyki jest nierozłącznie związana z samą matematyką. Gwałtowny rozwój tej gałęzi nauki w XIX wieku i zmiany w sposobie jej uprawiania nie mogły więc pozostać bez echa dla filozofii matematyki. W centrum zainteresowania znajdowała się analiza zespolona (Karl Weierstrass, Niels Henrik Abel, Bernhard Riemann), za sprawą m.in. Evariste Galois, Emmy Noether i Nielsa Henrika Abela intensywnie rozwijała się teoria grup i algebra abstrakcyjna, mocniejsze podstawy logiczne uzyskał też rachunek różniczkowy (Weierstrass, Cauchy). Matematyka stawała się coraz bardziej abstrakcyjna, a jej gałęzie ulegały coraz większej specjalizacji. Powstało także wiele nowych jej gałęzi, jak na przykład geometrie nieeuklidesowe (Gauss, Bolyai, Łobaczewski, Riemann). Dzięki pracom m.in. Boole'a, Fregego, Hilberta i Russella jako samodzielna dyscyplina wyodrębniła się logika matematyczna. W 1889 roku Giuseppe Peano opublikował pierwsze aksjomatyczne ujęcie arytmetyki liczb naturalnych. W latach 1874–1897 swoje prace opublikował Georg Cantor – powstała teoria mnogości, o której pisał:

> Nauka o rozmaitościach (Mannigfaltigkeitslehre). Tym słowem określam obszerną naukę, której próbowałem dotąd nadać kształt tylko w specjalnej postaci arytmetycznej czy geometrycznej nauki o zbiorach[1].

---

[1] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze

Najważniejszą częścią teorii mnogości były rozważania dotyczące zbiorów nieskończonych. Cantor wyróżnił nieskończoność absolutną (realizowaną w Bogu), nieskończoność pojawiającą się w świecie zależnym i stworzonym oraz nieskończoność *in abstracto* – wielkość matematyczną. Odróżniał nieskończoność aktualną (niepowiększalną – Absolut) od nieskończoności potencjalnej (powiększalnej – pozaskończoności); uważał, że ta druga nie jest w istocie żadną nieskończonością. W liście z 28 lutego 1886 roku do prof. dr. med. A. Eulenburga z Berlina następująco wyjaśnił swoje poglądy na nieskończoność:

> O nieskończoności potencjalnej mówi się przede wszystkim tam, gdzie mamy do czynienia z pewną nieokreśloną zmienną wielkością skończoną, która albo rośnie poza wszystkie skończone granice [...], albo staje się mniejsza niż każda granica skończona [...]; w ogólności mówię o nieskończoności potencjalnej wszędzie tam, gdzie rozważa się pewną wielkość nieokreśloną, którą można na nieskończenie wiele sposobów określić". „Nieskończoność potencjalna nie jest właściwie żadną nieskończonością, dlatego w swoich *Grundlagen* nazwałem ją nieskończonością niewłaściwą. [...] Pod nieskończonością aktualną należy rozumieć wielkość, która z jednej strony jest niezmienna, we wszystkich swych częściach stała i określona, która jest prawdziwą stałą, jednocześnie zaś przekracza każdą wielkość skończoną tego samego rodzaju[2].

Teoria mnogości jest nauką o zbiorach. Dziś pojęcie zbioru jest uznawane za pojęcie pierwotne, którego się nie definiuje. Cantor jednak próbował to uczynić – wprowadził pojęcie zbioru w sposób intuicyjny i nieprecyzyjny. W swoich *Grundlagen* pisał:

> Pod pojęciem „rozmaitości" (Mannigfaltigkeit) czy „zbioru" (Menge) rozumiem mianowicie ogólnie każdą wielość (jedes Veile), która może być pomyślana jako jedność (als Eines), tj. każdy ogół (Inbegriff) okre-

R. Murawski, Poznań 1994, s. 157.

[2] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 165–166..

ślonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość[3].

Dwanaście lat później w jednej z jego prac znaleźć można następującą definicję:

> Pod pojęciem „zbioru" (Menge) rozumiemy każde zebranie w jedną całość (jede Zusammenfassung zu einem Ganzen) M określonych, dobrze odróżnionych przedmiotów m naszego oglądu (unserer Anschauung) czy naszych myśli (które nazywane są „elementami" M)[4].

Również wprowadzone przez Cantora pojęcia liczby kardynalnej i porządkowej rozumiane były intuicyjnie. Wszystko to doprowadziło wkrótce do rozważań dotyczących podstaw matematyki. Pojawiły się pytania o niesprzeczność teorii matematycznych; pytania o status i role obiektów abstrakcyjnych. Rozpoczął się kryzys.

Był to drugi[5] w historii kryzys podstaw matematyki, bezpośrednio związany z odkryciem na gruncie teorii mnogości antynomii – par zdań wzajemnie sprzecznych, lecz w równym stopniu zasługujących na przyjęcie. Wśród najważniejszych wymienić należy: antynomię zbioru wszystkich liczb kardynalnych, zbioru wszystkich liczb równolicznych z danym zbiorem, czy – znane już Cantorowi – antynomię zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich liczb porządkowych oraz antynomię zbioru podzbiorów danego zbioru. Fakt, że antynomie tak mocno wstrząsnęły podstawami matematyki był – jak zauważa Dadaczyński[6] – wynikiem nałożenia się dwóch czynników. Jednym z nich był fakt, że antynomie czynią każdą wiedzę bezwartościową („[…] do koniunkcji zdań sprzecznych można dołączyć każde zdanie. Zatem w dowolnej teorii, w której występują

---

[3] Tamże.

[4] Tamże.

[5] Pierwszy kryzys podstaw matematyki związany był z odkryciem przez pitagorejczyków wielkości niewspółmiernych.

[6] J. Dadaczyński, *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2000, nr 26 s. 38–58.

antynomie, można udowodnić wszystko"[7]). Drugim czynnikiem było to, że problem antynomii nie dotyczył tylko teorii mnogości, lecz całej dziewiętnastowiecznej matematyki. „Pokazano wcześniej, że teoria ta [teoria mnogości] była teorią podstawową, na której można było nabudować całą matematykę dziewiętnastowieczną"[8].

2. Główne nurty w filozofii matematyki na początku XX wieku

Na przełomie XIX i XX wieku w filozofii matematyki wyłoniły się trzy główne nurty: logicyzm Gottloba Fregego, intuicjonizm Luitzena Egbertusa Jana Brouwera oraz formalizm Davida Hilberta.

Źródeł logicyzmu można się doszukiwać już u Platona, Arystotelesa i Euklidesa; zaś jego geneza tkwi w pytaniu o charakter sądów matematycznych. Zdaniem logicystów sądy matematyczne mają charakter tautologiczny – znaleźć tu można wyraźne nawiązanie do poglądów Johna Locke'a i Gottfrieda Wilhelma Leibniza.

W 1879 roku Frege opublikował pracę, w której opisał implikacyjno-negacyjny rachunek zdań[9]. Pięć lat później ukazuje się *Grundlagen der Arithmetik* – dzieło uznawane za początek logicyzmu, w którym przeczytać można:

> Mam nadzieję, że w pracy tej uczyniłem prawdopodobnym to, iż prawa arytmetyczne są sądami analitycznymi a priori. Zgodnie z tym arytmetyka byłaby tylko rozwiniętą logiką, każde twierdzenie arytmetyczne – prawem logicznym, ale prawem wydedukowanym. Zastosowania arytmetyki do wyjaśniania zjawisk przyrodniczych byłyby logicznym opracowaniem faktów obserwacyjnych[10].

[7] Tamże, s. 44.

[8] Tamże.

[9] Pracą tą było: *Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*.

[10] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 198.

Naczelną tezą logicyzmu było rozwinięcie arytmetyki liczb naturalnych jako części logiki, a więc uznanie, że całą matematykę można sprowadzić do logiki.

Doktryny logicyzmu były następujące:

I. Wszystkie pojęcia matematyczne (w szczególności pojęcia pierwotne) można zdefiniować explicite za pomocą pojęć czysto logicznych.

II. Wszystkie twierdzenia matematyki można wyprowadzić – za pomocą dedukcji logicznej – z aksjomatów i definicji logicznych.

III. Dedukcja ta opiera się na logice wspólnej dla wszystkich teorii matematycznych, czyli uzasadnianie twierdzeń we wszystkich teoriach matematycznych odbywa się przy odwołaniu do tych samych podstawowych zasad tworzących jedną dla całej matematyki logikę. (Wszelkie argumentacje w matematyce mogą być zatem sformalizowane.)[11]

Przyczyn takiego spojrzenia można doszukiwać się w matematyzacji logiki (nurt logiki symbolicznej reprezentowany m.in. przez Boole'a i de Morgana) oraz w tendencjach arytmetyzacji matematyki klasycznej – pracach Richarda Dedekinda i Karla Weierstrassa związanych z próbami arytmetyzacji analizy i powstałego w związku z tym problemu zbudowania arytmetyki liczb naturalnych. W propozycji Fregego był jednak pewien problem – Frege niejasno i wieloznacznie sformułował termin „logika". Można go rozumieć jako nazwę pewnej nauki, nazwę pewnego sformalizowanego języka, na terenie którego ustalone są reguły rachunku logicznego, bądź też jako nazwę systemu lub rachunku logicznego.

Jedną z odpowiedzi na powstały kryzys był intuicjonizm Brouwera. Swoje poglądy przedstawił Brouwer w dysertacji doktorskiej „Over de Grondlagen der Wiskunde" (1907) oraz w wykładzie z 1912 roku, wygłoszonym z okazji objęcia stanowiska profesora na Uniwersytecie w Amsterdamie. Źródło błędów w matematyce widział w dowodach niepodających konstrukcji postulowanych obiek-

[11] R. Murawski, *Filzofia matematyki. Zarys dziejów*, Poznań 2008, s. 88–89.

tów. Chcąc zaradzić groźbie sprzeczności, odrzucił wszelkie dowody niekonstruktywne logiki klasycznej. Brouwer obrał sobie za cel wykazanie potrzeby intuicjonistycznej rewizji teorii klasycznych oraz wskazanie, w jaki sposób pewnym definicjom klasycznie równoważnym odpowiadają różne – i nierównoważne – pojęcia intuicjonistyczne.

Wśród prekursorów intuicjonizmu czy – szerzej – nurtów konstruktywistycznych w filozofii matematyki wymienić należy m.in. Leopolda Kroneckera. To właśnie on jest autorem słynnego zdania: „Liczby naturalne stworzył dobry Bóg, wszystkie inne są dziełem człowieka”[12]. W projekcje arytmetyzacji analizy i algebry dążył do oparcia tych dziedzin na najbardziej fundamentalnym pojęciu liczby, a opisana przez niego zunifikowana teoria różnych rodzajów liczb opierała się na pierwotnej intuicji liczby naturalnej. Kronecker uznawał definicję liczby za poprawną tylko wtedy, gdy można rozstrzygnąć w skończonej ilości kroków, czy dana liczba podpada pod ową definicję, czy nie. Prowadziło to do kryterium tzw. „czystych dowodów istnienia”, zgodnie z którymi dowód tezy jest poprawny, jeśli podaje metodę znalezienia obiektu, którego istnienie postuluje. Warto także wspomnieć o semiintuicjonistach francuskich. Do grupy tej należeli: Henri Louis Lebesgue, Emile Borel, René-Louis Baire oraz Nikołaj Nikołajewicz Łuzin. Podobnie jak Kronecker, Lebesgue uznawał istnienie obiektu matematycznego tylko wtedy, gdy został on zdefiniowany za pomocą skończenie wielu słów. Odrzucał też pojęcie dowolnego ciągu liczbowego, akceptując tylko ciągi określone przez pewne prawa. Zdaniem Borela sama niesprzeczność nie wystarcza do przyjęcia, że rozważany obiekt istnieje. Poszczególne liczby rzeczywiste muszą być dane za pomocą skończonych definicji – ich zbiór nie może być zatem nieprzeliczalny. Kontinuum proponował rozważać jako dane bezpośrednio przez intuicję – kontinuum geometryczne. Wprowadził także pojęcie kontinuum praktycznego, składającego się z liczb skończenie definiowalnych.

---

[12] „Die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere sind Menschenwerk” – teza wygłoszona na jednym z zebrań naukowych w Berlinie, w roku 1886.

Także Henri Poincaré podkreślał rolę intuicji w poznaniu matematycznym. Jego zdaniem intuicja ma charakter spontaniczny i racjonalny – jest wrodzoną zdolnością umysłu, związaną z jego impulsywną aktywnością; przejawia się zarówno w pracy świadomej, jak i nieświadomej i nie musi opierać się na świadectwie zmysłów. Poincaré był twórcą konwencjonalizmu – poglądu, zgodnie z którym prawa formułowane przez nauki przyrodnicze nie są bezpośrednim opisem rzeczywistości, ale mają charakter umowny. Pewniki geometrii są konwencjami – ukrytymi definicjami – a o ich wyborze decydują fakty eksperymentalne i wygoda ujęcia.

Trzecim z nurtów, który wykrystalizował się na początku XX wieku, był formalizm Hilberta. Jego celem, sformułowanym po raz pierwszy na wykładzie podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu w 1900 roku, było ugruntowanie integralności matematyki klasycznej, operującej m.in. nieskończonością aktualną, poprzez pokazanie, że jest ona pewna i niezawodna. Hilbert był zdania, że podjęte próby ugruntowania matematyki prowadzą do jej zubożenia. Nie chciał odrzucać – jak Brouwer – matematyki traktującej o nieskończoności aktualnej; szukał uzasadnienia dla matematyki klasycznej. W tym celu stworzył teorię dowodu:

> Otóż taki jest właśnie zamiar mojej teorii. Jej celem jest danie definitywnej pewności metodzie matematycznej, czego nie udało się jeszcze dokonać w okresie krytycznym rachunku infinitezymalnego; ma więc ona doprowadzić do końca to, ku czemu zmierzał Weierstrass, tworząc podstawy analizy i w którym to kierunku uczynił konieczny i istotny krok. […] Końcowy wynik jest następujący: nieskończoność nie jest realizowana nigdzie w rzeczywistości. Nie istnieje ona w naturze, nie stanowi też prawomocnej bazy naszej myśli racjonalnej – godnej uwagi harmonii pomiędzy bytem a myślą. […] Operowanie nieskończonością może być uprawnione tylko przez skończoność[13].

[13] D. Hilbert, *Über das unendliche*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 289.

Dla Hilberta przedmiotem matematyki były konkretne symbole, których struktura jest bezpośrednio dana. Pisał:

> Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś w przedstawieniu: pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczenie bezpośrednio przed wszelkim myśleniem. Jeżeli wnioskowanie logiczne ma być pewne, to obiekty muszą dawać się całkowicie ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach; ich własności, różnice pomiędzy nimi, to, że następują jedne po drugich lub są zestawione jedne obok drugich, jest bezpośrednio poglądowo dane wraz z tymi obiektami jako coś, co ani nie da się zredukować do czegoś innego, ani nie potrzebuje takiej redukcji. To są podstawowe założenia filozoficzne, które uważam za niezbędne zarówno dla matematyki, jak i w ogóle dla jakiegokolwiek naukowego myślenia, rozumienia i komunikowania się. W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt, zgodnie z naszą teorią, jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny[14].

Hilbert przeciwstawiał się logicyzmowi. Jego zdaniem matematyka nie może być uzasadniona przez samą tylko logikę, ponieważ, aby stosować wnioskowania i operacje logiczne, coś musi być dane w przedstawieniu jako warunek wstępny. Takimi konkretnymi obiektami, które stanowiły punkt wyjścia matematyki, były dla niego liczby naturalne rozumiane jako układy znaków: 1, 11, 111… Mimo sprzeciwu wobec logicyzmu, Hilbert nawiązywał do tej samej tradycji filozoficznej, co logicyści. Podobnie jak Frege przeciwstawiał się empiryzmowi – pojęcia rozumiał w sposób platoński, absolutystyczny. Nawiązywał także do myśli Kanta – wykorzystywał Kantowską ideę rozumu.

Do filozofii Kanta nawiązywał także Brouwer, twierdząc, że umysł ludzki bezpośrednio ujmuje przedmioty matematyki i formułuje o nich sądy syntetyczne *a priori*. Brouwer przeciwstawiał

[14] Tamże, s. 297.

się zarówno platonizmowi, jak i formalizmowi. Głosił ontologiczną tezę konceptualizmu – matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną życiową aktywnością rozumu; jest wytworem umysłu ludzkiego, a nie systemem reguł i twierdzeń.

> W starej, obecnie prawie całkowicie porzuconej formie znajdujemy intuicjonizm u Kanta, który uważał, że czas i przestrzeń są właściwymi rozumowi ludzkiemu formami oglądu. Aksjomaty arytmetyki i geometrii były dla niego sądami syntetycznymi *a priori*, tzn. sądami niezależnymi od doświadczenia i nie dającymi się udowodnić analitycznie; to wyjaśniało ich apodyktyczną dokładność nie tylko *in abstracto*, ale także w świecie doświadczenia. Dla Kanta zatem możliwość obalenia praw arytmetycznych czy geometrycznych była nie tylko na skutek silnego przekonania wykluczona, ale w ogóle nie do pomyślenia[15].

Matematyka była dla Brouwera – podobnie jak dla Arystotelesa i Euklidesa – nauką wyposażoną w określoną treść. Zdaniem Brouwera obiekty matematyczne to konstrukcje myślowe matematyka – istnieje zatem tylko to, co jest konstruowalne przez myśl. Odrzucał – w przeciwieństwie do Fregego i Hilberta – metodę aksjomatyczną jako metodę budowania i ugruntowywania matematyki. Bronił tezy, że nie można postulować tylko istnienia obiektów – trzeba je uprzednio skonstruować. W tym stwierdzeniu chyba najdobitniej ujawnia się różnica między intuicjonizmem a formalizmem. Dla formalistów bowiem sama niesprzeczność była warunkiem wystarczającym dla istnienia, a każdy dowód istnienia, który nie podaje konstrukcji postulowanego obiektu, był zapowiedzią takiej konstrukcji. Brouwer natomiast bardzo wyraźnie podkreślał, że istnienie danego obiektu jest równoważne z możliwością jego konstrukcji. Heyting, który kontynuował dzieło Brouwera, pisał:

> Jeśli zwrot „istnieć" nie znaczy „być skonstruowanym", to musi on mieć jakieś znaczenie metafizyczne. Nie jest zadaniem matematyki ba-

---

[15] L. E. J. Brouwer, *Intuitionisme en formalisme*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 264.

> dać to znaczenie i rozstrzygać, czy jest ono sensowne i czy da się utrzymać. Nie mamy nic przeciwko temu, by matematyk wyznawał prywatnie dowolną teorię, którą lubi, ale program Brouwera domaga się, byśmy badali matematykę jako coś prostszego, bardziej bezpośredniego niż metafizyka. W rozważaniu więc myślowych konstrukcji matematycznych „istnieć" musi być synonimem „być skonstruowanym"[16].

Brouwer krytykował aksjomat wyboru, ponieważ był on dla niego jaskrawym przykładem postulowania istnienia zbioru, którego myśl ludzka na ogół nie jest w stanie określić. Zdecydowanie odrzucił też wszelkie dowody niekonstruktywne (niepodające konstrukcji postulowanych obiektów) dla twierdzeń egzystencjalnych – w ich stosowaniu widział bowiem źródło błędów matematyki. Nie akceptował także aksjomatyki Giuseppe Peano dla liczb naturalnych i Ernst Zermelo dla teorii mnogości. Konsekwencją przyjęcia takiego stanowiska było odrzucenie logiki klasycznej, w której każde zdanie sensowne jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

> Pytanie o to, na czym opiera się przekonanie o niemożliwej do zaatakowania dokładności praw matematycznych było od wieków przedmiotem badań filozoficznych. Można tu wyróżnić dwa stanowiska: intuicjonizm (głównie francuski) i formalizm (głównie niemiecki), które pod wieloma względami stawały się z czasem coraz bardziej sobie przeciwstawne. W ostatnich jednak latach osiągnęły one zgodę co do tego, że nie może być mowy o dokładnej ważności (geldigheid, validity) praw matematycznych jako praw przyrody. Na pytanie, gdzie zatem istnieje dokładność matematyczna, obydwie strony odpowiadają różnie; intuicjonista mówi, że w umyśle ludzkim, formalista, że na papierze[17].

Fakt niestosowalności logiki klasycznej do matematyki rozumianej w duchu intuicjonistycznym poparł Brouwer przykładami rozumowań, które w literaturze określa się jako „słabe kon-

---

[16] A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 278.

[17] L. E. J. Brouwer, *Intuitionisme en formalisme*, dz. cyt., s. 264.

trprzykłady". Ich celem było pokazanie, że pewne stwierdzenia, akceptowalne z punktu widzenia matematyki, są nieakceptowalne z punktu widzenia konstruktywistycznego. Dla zilustrowania można podać słaby kontrprzykład do stwierdzenia, że podzbiór zbioru skończonego jest zawsze skończony[18].

Rozważmy zbiór X={x: x=1 v (x=2 Λ Φ)}, gdzie Φ jest pewnym nierozstrzygniętym stwierdzeniem matematycznym. Zbiór X jest podzbiorem zbioru skończonego {1,2}, zatem według matematyki klasycznej jest skończony. W matematyce intuicjonistycznej nie można tego stwierdzić, ponieważ w tym celu należałoby ustalić, czy składa się z jednego, czy z dwóch elementów, a to wymaga rozstrzygnięcia Φ. Brouwer odrzucał więc logikę, na której całą matematykę zamierzał oprzeć Frege.

Dla Fregego prawa logiki nie były prawami przyrody, ale „prawami praw przyrody"; nie prawami myślenia, lecz „prawami prawdy". Za Platonem przyjął Frege, że wszelkie pojęcia istnieją i pozostają w różnych stosunkach między sobą niezależnie od czasu, przestrzeni i umysłu ludzkiego. Przeciwstawiał się formalizmowi oraz kantyzmowi – zdaniem Fregego matematyk nie stwarza pojęć i nie ustanawia wzajemnych związków między nimi, lecz je odkrywa. Twierdzenia matematyki (logiki) to dlań – inaczej niż u Kanta – prawdy analityczne; posiadają jednoznacznie określoną treść (logiczną). Frege wykorzystał wprowadzone przez Cantora pojęcie równoliczności zbiorów. Mówił o pojęciach i równoliczności ich zakresów, np. o podpadaniu danego przedmiotu pod dane pojęcie, a nie o należeniu elementu do zbioru. Takie podejście pozwalało na konsekwentne posługiwanie się tylko językiem logiki. Geometrię zaliczał Frege do matematyki stosowanej i nie zajmował się nią.

Z pracami Fregego, także z wydanym w 1893 roku *Grundsetze der Arithmetik*, zapoznał się Bertrand Russell. W 1902 roku napisał list do Fregego, w którym informował go o znalezieniu pewnej sprzeczności: antynomii klas niezwrotnych.

---

[18] Pierwszy przykład rozumowań określanych dziś jako „słabe kontrprzykłady" opublikował Brouwer w roku 1908.

> Niech *w* będzie taką oto własnością: być własnością, która może być orzekana o sobie samej. Czy *w* można orzec o niej samej? Z każdej odpowiedzi wynika odpowiedź przeciwna. Musimy zatem wyciągnąć wniosek, że *w* nie jest własnością[19].

Kilka dni później Russell uzyskał odpowiedź:

> Odkrycie przez Pana sprzeczności było dla mnie wielką niespodzianką i, powiedziałbym nawet, konsternacją, ponieważ wstrząsnęło to podstawą, na której chciałem zbudować arytmetykę. Wydaje się, że przekształcenie zdania ogólnego o równości [funkcji] na zdanie ogólne o równości [ich] przebiegów nie zawsze jest dozwolone i że moja reguła V (§20, s. 36) jest fałszywa oraz że moje wyjaśnienia w §31 są niewystarczające, by zapewnić, że moje kombinacje znaków mają sens we wszystkich przypadkach. Problem jest o tyle poważny, że wraz z odpadnięciem mojej reguły V, zdają się znikać nie tylko podstawa mojej arytmetyki, ale także jedyne możliwe podstawy arytmetyki. […]

W wydanym w 1903 roku *The Principles of Mathematics* Russell dokonał dokładnej analizy antynomii klas niezwrotnych, broniąc jednocześnie poglądów Fregego. W latach 1910, 1912 i 1913 ukazuje się monumentalne dzieło *Principia Mathematica*, w którym Russell, wspólnie z Whiteheadem, opisał teorie typów.

W przeciwieństwie do Fregego, Russell miał nastawienie antyplatońskie – symbole zbiorów rozumiał jako napisy nieoznaczające niczego. Konstrukcję liczb naturalnych przejął Russell od Fregego, zmuszony był jednak dopisać aksjomat nieskończoności. Inaczej niż Frege traktował też geometrię: odróżnił geometrię czystą – naukę matematyczną – od stosowanej – nauki empirycznej.

[19] *From Frege to Godel. A Source Book in Mathematical Logik, 1879–1931*, ed. J. van Heijenoort, Cambridge, Massachusetts, 1967, 124–125; w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 221.

2.1. Poglądy na temat języka symbolicznego

Różnice w poglądach Russella i Fregego widać także w podejściu do symboliki. Dla Russella symbole zbiorów były po prostu napisami i nie oznaczały niczego.

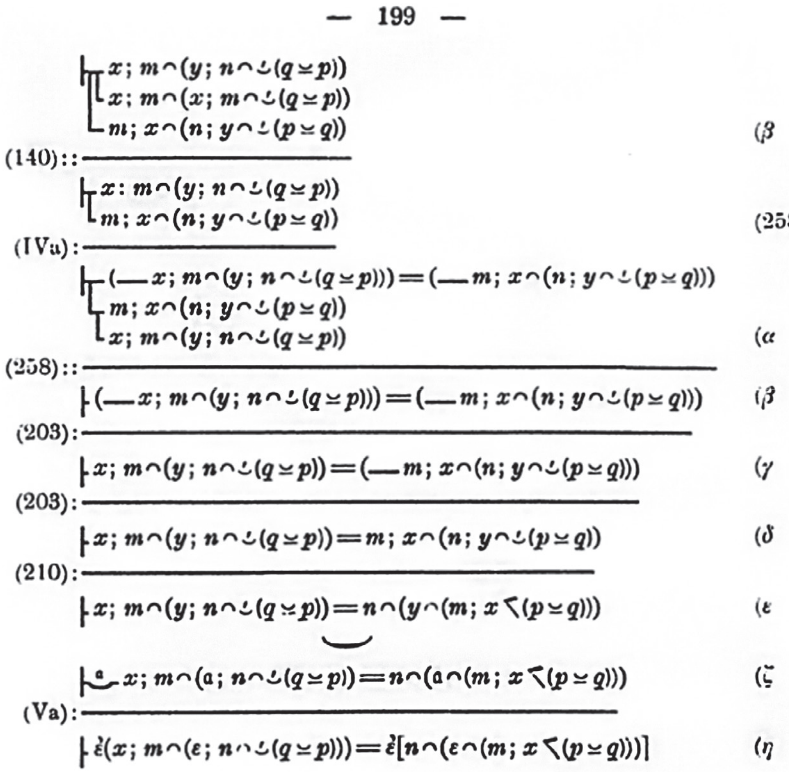
> Laikowi nie jest łatwo zrozumieć znaczenia symboliki w badaniu podstaw matematyki i objaśnienia mogą wydawać się tu czasami paradoksalne. […] Oczywistość jest zawsze wrogiem poprawności. Dlatego też wymyślamy pewną nową, trudną symbolikę, przy której nic nie wydaje się oczywiste. Potem ustanawiamy pewne reguły stosowania symboli i wszystko staje się wykonalne mechanicznie[20].

Dla Fregego natomiast symbolika była wygodnym narzędziem. Co więcej, teza redukcji matematyki do logiki pociągała za sobą konieczność używania oryginalnej, skomplikowanej symboliki.

Także Hilbert ściśle wiązał myślenie z językiem. Odmienny był pogląd intuicjonistów: dla Brouwera język nie był ważny. Jego zdaniem konstrukcje matematyczne są niezależne od języka. Język służy tylko do komunikowania myśli; błędem zatem jest analizowanie go. Swoje stanowisko Brouwer tłumaczył w następujący sposób:

> Stanowisko formalistów musi prowadzić do przekonania, że jeżeli jakieś inne formuły symboliczne zostałyby podstawione na miejsce tych, które wyrażają teraz podstawowe związki matematyczne i prawa matematyczno-logiczne, to brak uczucia zadowolenia nazywanego „przekonaniem o słuszności" (*echtheidsovertuiging*; *consciousness of legitimacy*), który może być wynikiem takiego podstawienia, w żaden sposób nie narusza ich matematycznej ścisłości. Nie do matematyki, a do filozofii lub antropologii należy zbadanie, dlaczego takie, a nie inne systemy logiki symbolicznej mogą być rzutowane efektywnie na przyrodę. Nie do matematyki, a do psychologii należy wyjaśnienie, dlaczego ufamy pewnym systemom logiki symbolicznej, a innym nie, w szcze-

[20] B. Russell, *Mathematics and the Metaphysicans*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 208.


— 199 —

x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p))
x; m⌢(x; m⌢⌣(q ≍ p))
m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q)) (β
(140)::
x: m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p))
m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q)) (258
(IVa):
(— x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p))) = (— m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q)))
m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q))
x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p)) (α
(258)::
(— x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p))) = (— m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q))) (β
(203):
x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p)) = (— m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q))) (γ
(203):
x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p)) = m; x⌢(n; y⌢⌣(p ≍ q)) (δ
(210):
x; m⌢(y; n⌢⌣(q ≍ p)) = n⌢(y⌢(m; x ⋎(p ≍ q))) (ε
𝔞 x; m⌢(𝔞; n⌢⌣(q ≍ p)) = n⌢(𝔞⌢(m; x ⋎(p ≍ q))) (ζ
(Va):
ἐ(x; m⌢(ε; n⌢⌣(q ≍ p))) = ἐ[n⌢(ε⌢(m; x ⋎(p ≍ q)))] (η

Rys. 1. G. Frege, *Grundsetze der Arithmetik* – fragment jednej ze stron jako przykład symboliki używanej przez Fregego

gólności dlaczego tak nie lubimy tzw. systemów sprzecznych, w których zarówno pewne zdania, jak i ich negacje są prawdziwe[21].

2.2. Poglądy na temat nieskończoności

Warto wyszczególnić poglądy twórców wszystkich trzech nurtów na temat nieskończoności. Jak już wspomniano – Hilbert nie chciał

---

[21] L. E. J. Brouwer, *Intuitionisme en formalisme*, Amsterdam 1912, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 265.

odrzucać matematyki traktującej o nieskończoności aktualnej. Jego zdaniem nieskończoność była niezbędna w matematyce bo uzupełniała to, co konkretne. Nie była ona jednak dla Hilberta pojęciem danym *a priori* i – co ważniejsze – nie jest bezpieczna, bo może prowadzić do antynomii. Dla formalistów zdania o nieskończoności nic nie znaczą same w sobie, nie mają żadnej wartości logicznej i nie mogą być używane w żadnych autentycznych sądach. Nieskończoność była dla Hilberta ideą czystego rozumu w sensie Kanta – pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, które nie może być realizowane w rzeczywistości, ponieważ przekracza wszelkie doświadczenie. Pisał:

> […] w matematyce, tym wzorze pewności i prawdy, istnieją definicje i metody wnioskowania, których każdy się uczy, których się naucza i które się stosuje, a które prowadzą do niedorzeczności. Gdzież więc należy szukać pewności i prawdy, jeśli nawet matematyka zawodzi? Istnieje jednak pewien całkowicie zadowalający sposób uniknięcia paradoksów bez zdradzania naszej nauki. Oczekiwania i postawy, które pomogą nam znaleźć ten sposób i wskażą nam kierunek, w którym należy pójść są następujące:
>
> 1. Gdzie tylko są jakieś widoki powodzenia, tam chcemy dokładnie badać owocne definicje i metody dedukcji. Chcemy je pielęgnować, wzmocnić i uczynić użytecznymi. Z raju, który stworzył nam Cantor, nikomu nie wolno nas wypędzić.[22] […]
>
> 2. Musimy ustanowić w matematyce taką samą pewność wnioskowań, jaka ma miejsce w zwykłej elementarnej teorii liczb, gdzie nikt nie ma żadnych wątpliwości i gdzie paradoksy i sprzeczności powstają jedynie przez naszą nieuwagę.
>
> 3. Osiągnięcie tego możliwe jest oczywiście tylko wtedy, kiedy uda nam się w pełni wyjaśnić istotę nieskończoności[23].

Podejście formalistów do problemu nieskończoności znacząco różniło się od podejścia intuicjonistów. Przyjąwszy tezę konceptu-

---

[22] „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können".

[23] D. Hilbert, *Über das unendliche*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., s. 296–297.

alistyczną, Brouwer musiał odrzucić istnienie nieskończoności aktualnej. Argumentował, że umysł nie może wykonać nieskończenie wielu konstrukcji, dlatego zbiór nieskończony należy rozumieć jako regułę tworzenia wciąż nowych jego elementów – taki zbiór jest jednak zawsze przeliczalny. Zdaniem intuicjonistów nie ma zbiorów nieprzeliczalnych ani liczb kardynalnych innych niż alef zero.

Jeszcze inne podejście do problemu nieskończoności mieli logicyści. Frege przyjmował istnienie nieskończoności aktualnej, a Russell w swojej teorii typów zmuszony był przyjąć istnienie nieskończenie wielu indywiduów. Było to wynikiem faktu, że liczb naturalnych jest nieskończenie wiele.

Frege bowiem proponował następującą definicję liczby naturalnej:[24]

1. Liczebnością zbioru X jest zbiór wszystkich zbiorów równolicznych z X (odwołanie do Cantora).
2. n jest liczbą, jeżeli istnieje zbiór X taki, że n jest liczebnością X.
3. 0 to liczebność zbioru pustego.
4. 1 to liczebność zbioru złożonego tylko z liczby 0.
5. Liczba m jest następnikiem n, jeżeli istnieje taki zbiór X oraz taki element a zbioru X, że m jest liczebnością zbioru X, a n jest liczebnością zbioru powstającego z X przez usunięcie elementu a.
6. n jest liczbą skończoną (naturalną), jeżeli n należy do wszystkich zbiorów X takich, że 0 X oraz dla każdej liczby k, jeżeli k X, to następnik k należy do X – zasada indukcji[25].

2.3. Programy naprawy podstaw matematyki

Koncepcja Fregego miała pewną wadę – można było na jej gruncie zbudować antynomię Russella. Dlatego Russell podjął się próby zbudowania arytmetyki w ramach całkowicie przebudowanego systemu logiki – rozgałęzionej teorii typów. Teza teorii typów opisana

[24] Warto w tym miejscu przypomnieć, że Frege nie używał pojęcia zbioru, lecz mówił o zakresach pojęć.

[25] Za: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, dz. cyt., s. 90.

przez Russella i Whiteheada w *Principia Mathematica* była następująca: ogół własności, które możemy rozważać, układa się w nieskończoną hierarchię typów. Własności I typu to własności indywiduów, własności II typu to własności własności I typu itd. Nie ma przy tym własności, które mogą przysługiwać równocześnie własnościom różnych pięter hierarchii. Russell wrócił do konstrukcji liczb naturalnych, którą zaproponował Frege, jednak zmuszony był założyć istnienie nieskończenie wielu indywiduów.

W podejściu Fregego – jak już wspomniano – zauważono problem związany z niejednoznacznym sformułowaniem terminu „logika". Teorii typów natomiast zarzucano, że opiera się na metafizyce: na platonizmie Fregego i pozornym nominalizmie Russella. Do jej wad zaliczano także używanie aksjomatów o charakterze pozalogicznym, niedopuszczanie zbiorów mieszanych oraz wieloznaczność pojęć. W teorii typów nie ma zbioru pustego, pojęcie to należy odnieść do danego typu – na przykład zbiór pusty indywiduów. Innym zarzutem formułowanym przeciwko teorii typów była jej konstrukcja *ad hoc*, pociągająca za sobą hierarchiczną budowę świata, dla której nie ma żadnego uzasadnienia.

Ostatecznie okazało się, że matematyki nie da się w całości sprowadzić do logiki, natomiast można ją sprowadzić do teorii mnogości. Dziś funkcjonuje inna wersja logicyzmu, tzw. hipotetyzm. Opiera się on na twierdzeniu o finitystyczności operacji konsekwencji[26] i twierdzeniu o dedukcji. Zgodnie z nim, dowodzone w teoriach matematycznych twierdzenia powinny być rozumiane jako implikacje z koniunkcją aksjomatów w poprzedniku i wyprowadzaną tezą w następniku.

Inną propozycją wyjścia z powstałego kryzysu był formalizm. Hilbert podzielił matematykę na finitystyczną i infinitystyczną. Matematyka finitystyczna traktuje o obiektach danych jasno i bezpośrednio. Zdania w niej są w pełni sensowne i realne, ponieważ odwołują się do obiektów konkretnych. Pojęcie matematyki fini-

[26] Twierdzenie o finitystyczności operacji konsekwencji: zdanie jest konsekwencją zbioru zdań X dokładnie wtedy, gdy istnieje skończony podzbiór X_0 zbioru X taki, że jest konsekwencją X_0.

tystycznej pozostaje jednak nieprecyzyjne; Hilbert nie podał jego ścisłej definicji. Matematyka infinitystyczna jest tą częścią matematyki, której podstawy – według Hilberta – należy dopiero zbudować. Zawiera zdania (obiekty) idealne, które odwołują się do obiektów nieskończonych.

Hilbert był przekonany, że dla każdego prawdziwego zdania realnego można podać dowód finitystyczny. Obiekty i metody infinitystyczne odgrywały dla niego tylko rolę pomocniczą, były narzędziem do rozwijania i rozszerzania systemu prawd realnych. Proponował usprawiedliwienie i ugruntowanie matematyki infinitystycznej środkami finitystycznymi. Chciał pokazać, że dowody twierdzeń w finitystycznej części matematyki wykorzystujące obiekty idealne prowadzą zawsze do poprawnych wyników. W tym celu stworzył teorię dowodu. Należało bowiem pokazać – po pierwsze – że matematyka infinitystyczna jest niesprzeczna, po drugie – że jest zachowawcza, czyli że każde zdanie realne, które można udowodnić w matematyce infinitystycznej, może być udowodnione w matematyce finitystycznej. Innymi słowy, należało udowodnić, że istnieje finitystyczna metoda pozwalająca na transformację każdego infinitystycznego dowodu zdania realnego na dowód finitystyczny.

Program Hilberta składał się z dwóch etapów. Pierwszym była formalizacja matematyki – rekonstrukcja matematyki infinitystycznej jako dużego, szczegółowo opracowanego systemu sformalizowanego. Hilbert chciał wprowadzić sztuczny język symboliczny i ustalić reguły budowania w tym języku poprawnych wyrażeń złożonych. Następnie należało wprowadzić aksjomaty i reguły wnioskowania, które odwoływałyby się tylko do kształtu formuł, a nie do ich znaczenia czy sensu. Te aksjomaty i reguły powinny być tak dobrane, by pozwalały na rozstrzygnięcie każdego problemu, który można sformułować w tym języku jako zdanie realne (zupełność). W ten sposób twierdzeniami stają się te formuły, dla których istnieje dowód formalny oparty na przyjętych aksjomatach i regułach.

Drugim etapem programu Hilberta było wykazanie niesprzeczności i zachowawczości matematyki infinitystycznej za pomocą metod finitystycznych. Dzięki formalizacji matematyki miało być możliwe rozważanie formuł, abstrahując od ich treści. Dowody byłyby wówczas skończonymi ciągami formuł, a więc obiektami konkretnymi – jasno i bezpośrednio danymi. Można byłoby je zatem badać metodami finitystycznymi. W tym celu należało pokazać, że nie istnieją dwa skończone ciągi formuł takie, że jeden kończyłby się pewną formułą, a drugi jej negacją. Aby dowieść zachowawczości, należało pokazać, że każdy dowód zdania realnego może być przekształcony w dowód tegoż zdania nieodwołujący się do obiektów idealnych. Hilbert abstrahował przy tym całkowicie od intuicyjnej treści zdań matematycznych.

W 1924 roku Ackermann wykazał niesprzeczność fragmentu arytmetyki liczb naturalnych. Sześć lat później Gödel pokazał, że każdy system sformalizowany, zawierający arytmetykę liczb naturalnych musi być niezupełny. Okazało się więc, że programu Hilberta nie da się w pełni zrealizować. W 1977 roku Paris, Harrington i Kirby podali przykład prawdziwego zdania o treści kombinatorycznej, a w 1982 roku przykład zdania o treści teorioliczbowej, które są nierozstrzygalne w sformalizowanym systemie arytmetyki liczb naturalnych, to znaczy takich, na które brak finitystycznych, czysto arytmetycznych dowodów, ale ich prawdziwość można wykazać za pomocą środków infinitystycznych.

Powstały później zrelatywizowany program Hilberta był próbą odpowiedzi na pytanie, jaka część matematyki infinitystycznej może być zrekonstruowana w systemach sformalizowanych, które są zachowawcze w stosunku do matematyki finitystycznej względem zdań realnych. Dziś ślady formalizmu możemy dostrzec w tzw. matematyce odwrotnej (Harvey Friedman, 1974), której celem jest badanie roli i znaczenia aksjomatu wyróżniania.

Program Brouwera natomiast zakładał budowę systemu logiki dostosowanego do filozoficznych tez intuicjonizmu. Brouwer chciał zrekonstruować matematykę na bazie zasad intuicjonistycznych. Po 1912 roku dokonał rewizji pojęcia kontinuum, a po 1923 roku rekonstrukcji części teorii zbiorów punktowych i teorii funkcji, rozwinął teorię przeliczalnych dobrych porządków i – razem ze swym studentem de Loorem – podał intuicjonistyczny dowód zasadniczego twierdzenia algebry. Po 1928 roku dzieło kontynuowali jego uczniowie: Maurits Joost, Belifante i Arend Heyting (Belifnte

Heyting – intuicjonistyczna teoria funkcji zespolonych, Arend Heyting – intuicjonistyczna geometria rzutowa, algebra i logika), a potem uczniowie Arona Heytinga (intuicjonistyczna topologia, teoria mocy, teoria przestrzeni Hilberta i geometria afiniczna).

Intuicjonizm miał jednak pewną zasadniczą wadę – w logice intuicjonistycznej nie są tautologiami prawo wyłączonego środka, prawo podwójnego przeczenia czy pierwsze prawo de Morgana, a także prawo transpozycji (w jedną stronę). Nie są także definiowalne spójniki. Należy zatem odrzucić m.in. wszelkie dowody nie wprost oraz dowody przez sprowadzenie do sprzeczności, a więc również szereg twierdzeń udowodnionych w ten sposób. To prowadzi do konieczności całkowitego odrzucenia matematyki klasycznej na rzecz nowej matematyki – matematyki intuicjonistycznej.

Intuicjonizm nie był jedynym nurtem konstruktywistycznym. Innymi kierunkami w filozofii i podstawach matematyki, których wspólną cechą było żądanie ograniczenia się do rozpatrywania wyłącznie obiektów konstruowalnych i operacji konstruktywnych, były:

1. Wspomniany wyżej konstruktywizm semiintuicjonistów francuskich (Lebesgue, Baire, Borel, Łuzin);
2. Finityzm, zgodnie z którym przedmiotem matematyki są tylko skończenie dane struktury. Operacje na tych strukturach muszą być efektywne, tj. muszą mieć charakter kombinatoryczny. W finityzmie nie są uprawnione pojęcia „abstrakcyjne", takie jak pojęcie dowolnego zbioru (Kronecker, Skolem);
3. Aktualizm, którego ideą jest zbudowanie matematyki opartej na aktualnych możliwościach poznawczych człowieka (Volphin);
4. Predykatywizm, gdzie przyczyn sprzeczności i paradoksów w matematyce doszukuje się w stosowaniu definicji niepredykatywnych – definicji przedmiotu poprzez odwołanie się do ogółu przedmiotów, którego elementem jest ów definiowany przedmiot (Poincaré, Weyl, Lorenzen);
5. Matematyka rekurencyjna, związana z pojęciem funkcji i relacji rekurencyjnych (Gödel, Church, Curry, Turing, Markow);

6. Konstruktywizm Bishopa, którego głównym celem było przyspieszenie nadejścia dnia, kiedy matematyka konstruktywna stanie się akceptowalną normą;
7. Mostowskiego stopnie konstruktywności (A. Mostowski)[27].

Dziś w filozofii matematyki ślady podejścia konstruktywistycznego widać m.in. w informatyce (ograniczone możliwości obliczeniowe komputera; λ-rachunek Churcha, logika kombinatoryczna Curry'ego, maszyny Turinga).

Podsumowanie

Odkrycie antynomii w teorii mnogości Cantora było przyczyną kryzysu, jaki dotknął podstawy matematyki na przełomie XIX i XX wieku. W reakcji na powstały kryzys wywiązała się ciekawa dyskusja na gruncie filozofii matematyki.

Spośród opisanych tu nurtów w filozofii matematyki, dwa okazały się być niemożliwe w realizacji. Jednym z nich był logicyzm, którego twórca – Frege – zakładał traktowanie matematyki jako części logiki. Matematyki jednak nie da się sprowadzić do logiki; można ją sprowadzić do teorii mnogości. Także i założenia formalistów, jak się okazało, nie prowadzą do rozwiązania problemu. Programu Hilberta, który zakładał usprawiedliwienie matematyki traktującej o nieskończoności za pomocą środków finitystycznych, nie da się w pełni zrealizować.

Tylko intuicjonizm Brouwera pozostał bez większego echa. Zaproponowany przez niego program rekonstrukcji matematyki na bazie zasad intuicjonistycznych nadal wywiera wpływ na badania nad podstawami matematyki. Posiada jednak zasadniczą wadę,

[27] Więcej o nurtach konstruktywistycznych przeczytać można w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów,* Warszawa 1995, s. 112–123, a także w: A. S. Troelstra, *History of Constructivism in the 20th century*, Set Theory, [w:] *Arithmetic, and Foundations of Mathematics – Theorems, Philosophies*, eds. J. Kennedy, R. Kossak, New York 2011 (Lecture Notes in Logic, 36).

której nie można wyeliminować – wymusza całkowite odrzucenie matematyki klasycznej.

Summary

Crisis As the Basis of Mathematics and the Attempt to Solve It

By the end of the 19th century, mathematics had become very intensively developed. Mathematical logic became an independent discipline, and in the 1880s Cantor published his work on set theory. All this led to questions about the consistency of mathematical theories and decidability theorems. Therefore, for the second time in the history of mathematics, there emerged a crisis of the basis of mathematics.

There were a few ideas for overcoming the crisis. In this paper, there will be described three trends in the philosophy of mathematics in the late 19th and early 20th centuries: logicism (Frege), intuitionism (Brouwer) and formalism (Hilbert). These three trends were described from the philosophical point of view and in the context of the crisis. Moreover, for each of them there will be present the most important methodological assumptions, and I will briefly describe attempts to achieve them. This will describe the problem in such a way that allows for the grasping of important differences and similarities between logicism, intuitionism and formalism and better understand their causes.

Keywords: set theory, logicism, intuitionism, formalism, crisis of the basis of mathematics, finitary methods

Bibliografia

Cantor G., *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* Leipzig 1883 (fragment), [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 157.

Cantor G., *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, „Zeitschrift f. Philosophie und philos Kritik" 91 (1887), 81–125; 92 (1888) 240–265 (fragmenty), [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 160–171.

Cantor G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 46 (1895), 481–512, §1 „Der Mächtigkeitsbegriff oder die Kardinalzahl", [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 157–159.

Heyting A., *Intuitionism. An introduction,* North-Holland Publishing Company*,* Amsterdam 1966, wyd. 2, part. I, „Disputation", 1–12, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 276–286.

Brouwer L. E. J., *Intuitionisme en formalisme,* Amsterdam 1912, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 263–275.

From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931, ed. J. van Heijenoort, Cambridge, Massachusetts 1967, 124–125, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 221–222.

Frege G., *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel,* eds. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, t. 2: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg 1976, 212–215, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 203–204.

Frege G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* Breslau 1884, wstęp (fregment), [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 176–203.

Hilbert D., *Über das unendliche*, „Matematische Annalen" 95 (1926), 161–190, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 288–307.

Russell B., *Mathematics and the Metaphysicians*, w: *Mysticism and Logic and other Essays,* London 1949, wyd. 8, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, przekład i komentarze R. Murawski, Poznań 1994, s. 206–221.

Dadaczyński J., *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2000, nr 26, s. 38–58.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów,* Warszawa 1995.